数理解析研究所講究録
771巻 1991年 1-76

二階算術の諸公理AC, DC, CA, BIの関係——Cut-Eliminationの初等的応用として

広大・総合科・数理情報 新井 敏康 (Toshiyasu Arai)

§1. 準備

L_1：一階算術の言語。constants は $=$, $<$ と primitive rec. functions (の定義)に対応する function constants 全部。first order variables は $x, y, z, \cdots, n, m, k$ で表わす。これらは number variables とも言う。

L_2：二階算術の言語。$L_2 = L_1 + \{X_i : i \in \omega\}$. 各 X_i は unary set variable。この原稿のほとんどすべてのところで二階算術の二階の variables は set (predicate) variables のみ, i.e., function variables は含まないとしてあるが、ときどき (WLK か BI がからむとき) function variables も入っていることになることがある。

記法 $n \in X \Leftrightarrow X(n)$; $n \notin X \Leftrightarrow \neg X(n)$.

L_2 の formulae の集合 $\mathcal{F}$ について次の schemata を考える：

$A \in \mathcal{F}$ について.

$\mathcal{F}$-CA： $\exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow A(n))$

$\mathcal{F}$-AC： $\forall n \exists X A(n, X) \to \exists Y \forall n A(n, (Y)_n)$　但し、

$(Y)_n = \{m : Y(\pi(n,m))\}$，$\pi$はある pairing function w/ inverses π_0, π_1.

$\mathcal{F}$-DC： $\forall X \exists Y A(X,Y) \to \forall U \exists Z[(Z)_0 = U \,\&\, \forall n A((Z)_n, (Z)_{n+1})]$

$\mathcal{F}$-GDC： $\forall n \forall X \exists Y A(n,X,Y) \to \forall U \exists Z \forall n[(Z)_0 = U \,\&\, A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})]$

$\mathcal{F}$-IA： $A(0) \,\&\, \forall n (A(n) \to A(n+1)) \to \forall n A(n)$

また、$\mathcal{F} = \Delta^0_1, \Delta^1_1, \Delta^1_2, \cdots$ について、

$\mathcal{F}$-CA： $\forall n (A(n) \leftrightarrow \neg B(n)) \to \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow A(n))$

$A, B \in \Sigma^0_1, \Sigma^1_1, \Sigma^1_2, \cdots$.

Formulae の集合はふつうに定義される。例えば、

1. $\Sigma^0_0 = \Pi^0_0 = \Delta^0_0 =$ the set of bounded formulae in L_2

2. Σ^0_1 は $\exists n B$ w/ $B \in \Pi^0_0$ なる形の formulae の集合。

3 Σ^1_1 は $\exists X A$ w/ $A \in \Pi^0_\infty = \Pi^1_0 = \Sigma^1_0$ (⊜ second order の quantifier なし) の形の formulae の集合。

NB. これらの formulae の集合の元には二階の parameter は occur してよい。

Rem. $\mathcal{F} = \Sigma^1_1$ などのように、$\mathcal{F}$が次で閉じていれば、$\mathcal{F}$-GDC の最初の集合 U は指定しなくてよい：

$A \in \mathcal{F} \Rightarrow (n = 0 \,\&\, Y = U) \vee (n \neq 0 \,\&\, A(n, X, Y)) \in \mathcal{F}$.

これは、$\mathcal{F}$に set parameter (X, Y以外の！) を許したからである。Σ^1_1-ャ Σ^1_1-DC でも U を指定しなくてよいかは不明。

Formulaeの集合$\mathcal{F}$について、

1. $\mathcal{F}^- \equiv \{A \in \mathcal{F} : A$に二階のparameterなし$\}$

2. $\mathcal{F}^= \equiv \{A \in \mathcal{F}^- : A$に一階のparameterなし$\}$.

以下で考える二階算術の理論は、とくに断わらない限り、次の理論Σ^0_0-CA_0をbase theoryとして含む：Σ^0_0-CA_0の公理は、

1. L_1のconstantsについての公理。

2. Σ^0_0-CA

3. IA : $\forall X[0 \in X \mathbin{\&} \forall n(n \in X \to n+1 \in X) \to \forall n(n \in X)]$.

そして、公理(図式)Sについて、理論Σ^0_0-$CA_0 + S$(Sの公理をΣ^0_0-CA_0に加えた理論)そのものをS_0と書き、また、理論Σ^0_0-$CA_0 + S + \Pi^1_\infty$-IA = Σ^0_0-$CA + S$のことをSと書く。S_0とSの違いは、Induction Axiomが一つのΠ^1_1-sentence IAではいっているか(S_0)、すべてのL_2のformulae($=\Pi^1_\infty$)に、IAを適用してよいか(S)の差。

$S = \mathcal{F}$-AC, $\mathcal{F}$-DC, $\mathcal{F}$-GDC, Δ^1_i-CAについて、SR_0, SRは、公理Sを対応するruleでおきかえてS_0, Sから得られる理論を表わす：Sの公理は$A \to B$(のuniversal closure)という形をしている。SRは、A / Bというrule, つまり，$SR \vdash A \Rightarrow SR \vdash B$ということ。但し、$\Delta^1_i$-$CAR$等は慣習に従って、$\Delta^1_i$-$CR$と書く。

次に、Π^1_n-CA$^{<\alpha}$の定義。≺を、あるprimitive rec. well-ordering w/ the least element 0 とし、primitive rec. な predicates, function Suc, Lim, pd で、 $Suc(\beta) \Leftrightarrow \beta$ is a successor ordinal wrt ≺;

$Lim(\beta) \Leftrightarrow \beta$ is a limit ordinal wrt ≺;

$$pd(\beta) = \begin{cases} \beta \text{ の } \prec \text{ についての predecessor} & \text{if } Suc(\beta) \\ \beta & \text{o.w.} \end{cases}$$

となるものがあるとする。(具体的に考えるのは、ε_0 や Γ_0 の standard well-ordering だけ。) 各 $n \geq 0$ について formula $Hier^n_\alpha(X,Y)$ を次のように定義する;

$$Hier^n_\alpha(X,Y) \Leftrightarrow (Y)_0 = X \ \& \ \forall \beta \preceq \alpha [(Suc(\beta) \to (Y)_\beta = P_n((Y)_{pd(\beta)})) \ \& \ \& (Lim(\beta) \to (Y)_\beta = \sum_{\gamma \prec \beta} (Y)_\gamma)]$$

但し、1. $X = Y \Leftrightarrow \forall n (n \in X \leftrightarrow n \in Y)$

2. $\sum_{\gamma \prec \beta} (Y)_\gamma = \{(\gamma, n) : \gamma \prec \beta \ \& \ n \in (Y)_\gamma\}$

3. $P_n(X, x)$ は Π^1_n-complete predicate.

3.0 $P_0(X) \doteq X' \triangleq X$ の jump $\doteq \{n : \{n\}^X(n)\downarrow\}$

$= \{n : \exists m T^X(n, n, m)\} = \{n : \exists m T(n, n, \bar{X}(m), m)\}$

T: Kleene の T-predicate, $\bar{X}(m) = \langle x_0 \cdots, x_{m-1} \rangle$ s.t.

$x_i = 0 \Leftrightarrow i \in X \quad \forall i < m.$

(ここでは Π^1_0 を Π^0_1 としている)

3.1 $P_1(X) \doteq X$ の hyper-jump $\doteq \mathcal{O}^X$ etc.

3.2. $n \geq 2$ については $P_n(X)$ は Π^1_n-predicate in X を enumerate してつくる。

各'ordinal' α について、theories Π^1_n-CA^α_0, Π^1_n-CA^α を、

Π^1_n-$CA^\alpha_0 \triangleq \Sigma^0_0$-$CA_0 + \forall X \exists Y\, Hier^n_\alpha(X,Y)$

Π^1_n-$CA^\alpha \triangleq \Sigma^0_0$-$CA + \forall X \exists Y\, Hier^n_\alpha(X,Y)$

また、

Π^1_n-$CA^{<\alpha}_0 \triangleq \bigcup_{\beta<\alpha} \Pi^1_n$-$CA^\beta_0 = \Sigma^0_0$-$CA_0 + \{\forall X \exists Y\, Hier^n_\beta(X,Y) : \beta<\alpha\}$

Π^1_n-$CA^{<\alpha} \triangleq \bigcup_{\beta<\alpha} \Pi^1_n$-$CA^\beta$

とする。(ふつうは、α を下に書いて、Π^1_n-CA_α とするが、こうすると、IAを制限していることを表わす添字の0を書く場所がなくなってしまう。S. Feferman流なら、Π^1_n-CA^α_0 を $(\Pi^1_n$-$CA)_\alpha\restriction$ と書く。)

明らかに、Π^1_n-$CA^\alpha_0 \vdash \forall X \exists Y\, Hier^n_\beta(X,Y)$ for each $\beta < \alpha\cdot\omega$ より、Π^1_n-$CA^\alpha_0 = \Pi^1_n$-$CA^{<\alpha\cdot\omega}_0$。従って、$\Pi^1_n$-$CA^{<\alpha}_0$, Π^1_n-$CA^{<\alpha}$ で、α が additive principal のとき, i.e., $\alpha = \omega^\beta$ の形のときだけ扱えばよい。これは absolute hierarchy $\Pi^{1,-}_n$-CA^α_0, $\Pi^{1,-}_n$-CA^α ではうまくいかない:

$\Pi^{1,-}_n$-$CA^\alpha_0 \triangleq \Pi^1_{n-1}$-$CA_0 + \exists Y\, Hier^n_\alpha(\phi, Y)$ ($X=\phi$, 空集合)

但し、Π^1_{-1}-$CA \triangleq \Sigma^0_0$-CA, Π^1_0-$CA \triangleq \Pi^0_1$-CA。(Π^1_{-1}-$CA = \Delta^0_1$-CA のほうがいいかもしれぬ)

Lemma 0.1

1) $S = AC, DC, GDC$ について、

Σ^1_{n+1}-$\tilde{S} = \Pi^1_n$-$\tilde{S}$ 但し、$\Pi^1_0 \triangleq \Pi^0_2$ (ここでは) で、

$\tilde{S} \in \{S, S_0, SR, SR_0\}$.

2) $\Sigma^1_{n+1}\text{-DC}_0 \vdash \Sigma^1_{n+1}\text{-AC}$

3) $\Sigma^1_{n+1}\text{-DCR}_0 \vdash \Sigma^1_{n+1}\text{-ACR}$

4) $\Sigma^1_{n+1}\text{-DCR}_0 \vdash \forall X \exists Y\, \mathrm{Hier}^n_\alpha(X,Y)$ for each $\alpha < \omega^\omega$

5) $\Delta^1_{n+1}\text{-CR} + \Sigma^1_n\text{-AC} \vdash \forall X \exists Y\, \mathrm{Hier}^n_\alpha(X,Y)$ for each $\alpha < \omega^\omega$

6) $\Delta^1_{n+1}\text{-CA} + \Sigma^1_n\text{-AC} \vdash \forall X \exists Y\, \mathrm{Hier}^n_\alpha(X,Y)$ for each $\alpha < \varepsilon_0$.

従って、

7) $$\Pi^1_n\text{-CA}_0 \subseteq \Delta^1_{n+1}\text{-CR}_0 \begin{array}{l} \subseteq \Delta^1_{n+1}\text{-CA}_0 \subseteq \\ \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-ACR}_0 \subseteq \end{array} \Sigma^1_{n+1}\text{-AC}_0$$

8) $\Pi^1_n\text{-CA}_0^{<\omega^\omega} \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-DCR}_0 \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-DC}_0 \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-GDC}_0$

9) $\Pi^1_n\text{-CA}^{<\omega^\omega} \subseteq \Delta^1_{n+1}\text{-CR} + \Sigma^1_n\text{-AC} \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-ACR} + \Sigma^1_n\text{-AC}$
$\subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-DCR} \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-GDCR}$

10) $\Pi^1_n\text{-CA}^{<\varepsilon_0} \subseteq \Delta^1_{n+1}\text{-CA} + \Sigma^1_n\text{-AC} \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-AC} \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-DC}$
$\subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-GDC}$.

但し 5), 6), 9), 10) で、$n=0$ のときは $+\Sigma^1_0\text{-AC}$ は除く。また、$n=1$ のときは $\Delta^1_2\text{-CR} \vdash \Sigma^1_1\text{-AC}$ より除く。しかし、$n>1$ のときは、$\Delta^1_{n+1}\text{-CR}$ or $\Delta^1_{n+1}\text{-CA}$ or $\Sigma^1_{n+1}\text{-ACR} \vdash \Sigma^1_n\text{-AC}$ 及び $\Pi^1_n\text{-CA}^{<\omega^\omega} \subseteq \Delta^1_{n+1}\text{-CR}$ 等は不明。

Proof. 1) $n \neq 0$ は明らか。各 $A \in \Pi^0_\infty$ について ある $B \in \Pi^0_2$ があって

$\text{ACA}_0 = \Pi^0_1\text{-CA}_0 \vdash A \leftrightarrow \exists X B$ (Skolem よる)

よって $\Pi^0_2\text{-SR}_0 \vdash \Pi^0_1\text{-CA}$ で十分。明らかに、

$\Pi^0_2\text{-ACR}_0 \vdash \Pi^0_1\text{-CA}$ ($\because$) $\vdash \forall n \exists X (n \in X \leftrightarrow A(n))$)

次に、$A \in \Pi^0_2$ について、$\Pi^0_2\text{-DCR}_0 \vdash \forall n \exists X A(n, X)$ とする。

$B \in \Pi^0_2$ を、

$B(X,Y) \Leftrightarrow (X)_0 \neq \phi \to \forall n($ n is the least element of $(X)_0 \to$

$\to A(n,(Y)_1)$ & $n+1$ is the least element of $(Y)_0)$

とおく。仮定より $\Pi^0_2\text{-}DCR_0 \vdash \forall X \exists Y B(X,Y)$. よって、$\exists Y$ s.t.

$(Y)_0 = \{\pi(0,0)\}$ and $\forall m[(Y)_{m,0} \neq \phi \to \forall n($ n is the least element of $(Y)_{m,0} \to A(n,(Y)_{m+1,1})$ & $n+1$ is the least element of $(Y)_{m+1,0}]$

但し、$(Y)_{m,i} = ((Y)_m)_i$。ind. on m で $\forall m($ m is the least element of $(Y)_{m,0})$ よって $\forall m\, A(m,(Y)_{m+1,1})$. Put

$Z \equiv \{\pi(m,n) : n \in (Y)_{m+1,1}\}$ Then $\forall m\, A(m,(Z)_m)$。つまり、

$\Pi^0_2\text{-}DCR_0 \vdash \forall n \exists X A(n,X) \Rightarrow \Pi^0_2\text{-}DCR_0 \vdash \exists Z \forall n A(n,(Z)_n)$, i.e.,

$\Pi^0_2\text{-}DCR_0 \vdash \Pi^0_2\text{-}ACR$。上のことより $\Pi^0_2\text{-}DCR_0 \vdash \Pi^0_1\text{-}CA$。

2) 1) より $i \leq n$ についての ind. で $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DC_0 \vdash \Pi^1_i\text{-}AC$ を言えばよい。$i=0$ は 1) と同じ。$i>0$ のとき、i.e., $A \in \Pi^1_i$ のとき、1) でつくった B が $B \in \Pi^1_i$ を示すには、IH(= Induction Hyp.) $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DC_0 \vdash \Sigma^1_{i-1}\text{-}AC$ を使えばよい。

3) $A \in \Pi^1_n$ について、1) の B が $B \in \Pi^1_n$ を示すには、2) より、

$\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \Sigma^1_n\text{-}DC$ で十分。$A \in \Sigma^1_n$ なら、

$B(X,Y) \Leftrightarrow \forall X \exists Y A(X,Y) \to A(X,Y) \in \Sigma^1_{n+1}$

より O.K.

4) k についての metainduction で $\forall X \exists Y \mathrm{Hier}^n_{\omega^k}(X, Y)$ を示す。

($k=0$) $\Pi^0_2\text{-}ACR_0 \vdash \Pi^0_1\text{-}CA$ と同様にして、$\Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR_0 \vdash \Pi^1_n\text{-}CA$

3) より $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \Pi^1_n\text{-}CA$.

(Induction Step) $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \forall X \exists Y \mathrm{Hier}^n_{\omega^k}(X, Y)$ とする。

$\forall X \exists Y \mathrm{Hier}^n_{\omega^k}((X)_{\omega^k}, Y)$ である。2) と $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \Sigma^1_n\text{-}DC$, 3)

より $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \Sigma^1_n\text{-}AC$ 。よって $\mathrm{Hier}^n_\alpha(X,Y) \in \Delta^1_{n+1}$ in

$\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0$ $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR$ より、与えられた X について Y を、

$\mathrm{Hier}^n_{\omega^k}(X, (Y)_0)$ & $\forall m \mathrm{Hier}^n_{\omega^k}((Y)_{m,\omega^k}, (Y)_{m+1})$ ととり、Z を

$$\begin{cases} (Z)_{\omega^k \cdot m + r} = (Y)_{m,r} & m < \omega \ \& \ r < \omega^k \\ (Z)_{\omega^{k+1}} = \Sigma_{\alpha < \omega^{k+1}} (Z)_\alpha = \{(\omega^k \cdot m + r, x) : x \in (Y)_{m,r}\} \end{cases}$$

とおくと、ind on m で $\forall m < \omega \mathrm{Hier}^n_{\omega^k \cdot (m+1)}(X, Z)$ よって

$\mathrm{Hier}^n_{\omega^{k+1}}(X, Z)$ (induction してよいのは $\mathrm{Hier}^n_\alpha(X,Y) \in \Delta^1_{n+1}$ in $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0$ で 3), 7) より $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \Delta^1_{n+1}\text{-}CR$ だから).

5), 6) $\Sigma^1_{n+1}\text{-}AC!$, $\Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR!$ を、$A \in \Sigma^1_{n+1}$ について、

$\Sigma^1_{n+1}\text{-}AC!$: $\forall n \exists ! X A(n, X) \to \exists Y \forall n A(n, (Y)_n)$,

$\Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR!$ を対応する rule とすると、

(☆) $\Delta^1_{n+1}\text{-}CA + \Sigma^1_n\text{-}AC \vdash \Sigma^1_{n+1}\text{-}AC!$

$\Delta^1_{n+1}\text{-}CR + \Sigma^1_n\text{-}AC \vdash \Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR!$

∵) $A \in \Sigma^1_{n+1}$ について $B \in \Sigma^1_{n+1}$ を、

$B(n, m, k) \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} \exists X [A(n, X) \& ((m \in X \& k = 0) \vee (m \notin X \& k = 1))]$

$\forall n \exists! X A(n, X) \rightarrow \forall n \forall m \exists! k\, B(n, m, k)$,

$\forall n \forall m \exists! k\, B(n, m, k) \rightarrow \forall n \forall m \forall k\, [B(n, m, k) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \forall u (B(n, m, u) \rightarrow k = u)]$.

となるから Δ^1_{n+1}-CA + Σ^1_n-AC より $\exists Y$ s.t.

$\forall n, m, k ((n, m, k) \in Y \leftrightarrow B(n, m, k))$

$Z \stackrel{d}{=} \{(n, m) : (n, m, 0) \in Y\}$ とおくと、$\forall n \exists! X A(n, X)$ より $\forall n A(n, (Z)_n)$.

いま $H(\alpha)$ を、

$H(\alpha) \stackrel{d}{\Leftrightarrow} \forall X \exists! Y\, Hier^n_\alpha(X, Y)$ & $\alpha < \varepsilon_0$

Δ^1_{1+n}-CA + Σ^1_n-AC $\vdash \forall \beta < \alpha\, H(\beta) \rightarrow H(\alpha)$

Δ^1_{n+1}-CR + Σ^1_n-AC $\vdash \forall \beta < \alpha\, H(\beta) \Rightarrow \Delta^1_{n+1}$-CR + Σ^1_n-AC $\vdash H(\alpha)$

∵) $Lim(\alpha)$ のとき、与えられた X について、仮定より

$\forall \beta < \alpha \exists! Y\, Hier^n_\beta(X, Y)$. Σ^1_n-AC より $Hier^n_\beta(X, Y) \in \Sigma^1_{n+1}$.

Σ^1_{n+1}-AC! より $\exists Y \forall \beta < \alpha\, Hier^n_\beta(X, (Y)_\beta)$.

$Z \stackrel{d}{=} \bigcup_{\beta < \alpha} (Y)_\beta = \{x : \exists \beta < \alpha (x \in (Y)_\beta)\}$ とおくと $\forall \beta < \alpha\, Hier^n_\beta(X, Z)$

$W \stackrel{d}{=} Z \cup \{\alpha\} \times Z$ として $Hier^n_\alpha(X, W)$ となる。uniqueness は明らか。

よって、full induction = Π^1_∞-IA があれば、各 $\alpha < \varepsilon_0$ までの超限帰納法がすべての formula について証明できることより、6) は O.K. 一方、Δ^1_{n+1}-CR + Σ^1_n-AC $\vdash H(\alpha)$ for each $\alpha < \omega^\omega$ は、

Δ^1_{n+1}-CR + Σ^1_n-AC $\vdash H(\omega^k)$ を k についての metainduction.

$\vdash H(\omega^k)$ とすると、Π^1_∞-IA より $\vdash \forall n\, H(\omega^k \cdot (n+1))$ よって

$\forall \beta < \omega^{k+1} H(\beta)$. Σ^1_{n+1}-ACR! より OK, $H(\omega^{k+1})$. //

以下の証明論的議論をするのに都合のよい *logic calculus* を定義する。

Def. 1. L_2(でなくてもよいが)の formula は、以下すべて negation normal form に書かれているとする。すなわち、formula は、atomic formulae とその否定 $s=t$, $s\neq t$, $s<t$, $s\not<t$, $t\in X$, $t\notin X$, etc. から *logical operator* $\wedge, \vee, \forall, \exists$ をほどこして得られるものに限る。formula A について、$\neg A$ は(A: atomic 以外は)記号列 A の左に記号 $\neg$ を書いた記号列を表わすのでは<u>なく</u>、de Morgan の法則 $\neg(A\wedge B)=\neg A\vee\neg B$ 等と二重否定の除去 $\neg\neg A=A$ によってつくられる formula (in negation normal form !) を表わす。$A\rightarrow B$ は $\neg A\vee B$ のこと等。

2. formulae の有限集合を <u>*sequent*</u> とよび、$\Gamma, \Delta, \Lambda, \cdots$ で表わす。$\Gamma=\{A_1,\cdots,A_n\}$ のとき、Γ の意味は $A_1\vee\cdots\vee A_n$ のこと。$n=0$ のときは偽,矛盾を表わす。

3. *sequents* Γ, Λ と formula A について、

$\Gamma, \Lambda \triangleq \Gamma\cup\Lambda$ ($\Gamma=\{A_1,\cdots,A_n\}$, $\Lambda=\{A_{n+1},\cdots,A_m\}$ なら $\Gamma,\Lambda=\{A_1,\cdots,A_m\}$)

$\Gamma, A \triangleq \Gamma\cup\{A\}$。

以下、基本となる純粋に論理的な *logic calculus* L_2K を定義する。L_2K の公理(始式ともいう)と推論(図)は以下のとおり:

(Ax) $\neg A, A, \Gamma$　A : atomic (Γは任意の sequent, 以下同じ)

$$(\wedge)\ \frac{\Gamma, A_0 \qquad \Gamma, A_1}{\Gamma, A_0 \wedge A_1} \qquad (\vee)\ \frac{\Gamma, A_i}{\Gamma, A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

$$(\forall^1)\ \frac{\Gamma, A(x)}{\Gamma, \forall x A(x)} \qquad (\exists^1)\ \frac{\Gamma, A(t)}{\Gamma, \exists x A(x)}$$

但し、variable x は下式 $\Gamma, \forall x A(x)$

に free には occur しない。

$$(b\forall)\ \frac{\Gamma, x \nless t, A(x)}{\Gamma, \forall x < t\, A(x)} \qquad (b\exists)\ \frac{\Gamma, t_1 < t \qquad \Gamma, A(t_1)}{\Gamma, \exists x < t\, A(x)}$$

但し、variable x は下式 $\Gamma, \forall x < t\, A(x)$

に free には occur しない。

$$(\forall^2)\ \frac{\Gamma, A(X)}{\Gamma, \forall X A(X)} \qquad (\exists^2)\ \frac{\Gamma, A(X)}{\Gamma, \exists X A(X)}$$

但し、variable X は下式 $\Gamma, \forall X A(X)$

に free には occur しない。

$$(\mathrm{cut})\ \frac{\Gamma, \neg A \qquad A, \Lambda}{\Gamma, \Lambda}$$

ここに、formula A (又は $\neg A$) を、この (cut) の <u>cut formula</u> と

よぶ。

次に、余計な rules (公理 or 推論) の入った場合を考える。

Def. 1. <u>rule</u> とは、次の4条件をみたす triple $\langle\langle\Gamma_i\rangle_{i\leq n}:\bar{a}:\bar{b}\rangle$ のこと：i) $\langle\Gamma_i\rangle_{i\leq n}$ は sequents の有限列 $(n\geq 0)$

ii) $\bar{a}$, $\bar{b}$ は (free) variables $a_0,\cdots,a_{m-1}$ と $b_0,\cdots,b_{k-1}$ の列で、

$\#\{a_0,\cdots,a_{m-1},b_0,\cdots,b_{k-1}\}=m+k$ （つまり $a_i\neq a_j$, $b_i\neq b_j$, $a_i\neq b_j$）$(m,k\geq 0)$

iii) $\Gamma_0,\cdots,\Gamma_n$ に occur する free variables は $\bar{a}\cup\bar{b}$ に限る（$\bar{a}\cup\bar{b}$ が全部、実際に occur していなくてもよい）

iv) $a_i\ (i<m)$ は Γ_n に occur しない。

◎ 但し、$\bar{a}$, $\bar{b}$ はいずれの sort の variables でもよい。つまり、例えば、$\bar{a}=a_0,\cdots,a_{m-1}$ は、$a_0=x_0,\cdots,a_i=x_i$, $a_{i+1}=X_{i+1},\cdots,a_{m-1}=X_{m-1}$ で、$x_0,\cdots,x_i$ は first order variables, $X_{i+1},\cdots,X_{m-1}$ は second order variables, $-1\leq i\leq m-1$, etc.

2. rules の集合 $\mathcal{R}$ が <u>adequate</u> とは、$\mathcal{R}$ に入っている rule $\langle\langle\Gamma_i\rangle_{i\leq n}:\bar{a}:\bar{b}\rangle$ の $\bar{a}$ を、上の ii), iv) をみたす範囲で他の variables $\bar{a}'=a_0',\cdots,a_{m-1}'$（勿論、sort が一致っていないといけない）に書きかえた rule $\langle\langle\Gamma_i'\rangle_{i\leq n}:\bar{a}':\bar{b}\rangle$ がまた $\mathcal{R}$ に属すこと。ii) は $a_i'\neq a_j'$, $a_i'\neq b_j$. iv) は a_i' は Γ_n に occur しない，Γ_i' は Γ_i の中の variables $\bar{a}$ を同時に $\bar{a}'$ でおきかえて得られる sequent。

3. rule $\langle\langle\Gamma_i\rangle_{i\leq n}:\bar{a}:\bar{b}\rangle$ の <u>instance</u> とは、次の形の図形：

$$\frac{\Gamma_0(\bar{a}:\bar{t}),\Lambda\quad\cdots\quad\Gamma_{n-1}(\bar{a}:\bar{t}),\Lambda}{\Gamma_n(\bar{a}:\bar{t}),\Lambda}\qquad(\Gamma_n(\bar{a}:\bar{t})=\Gamma_n(\bar{t}))$$

ここに、

i) Λ は、variables $\bar{a}$ が occur しない勝手な sequent。

ii) $\bar{t}$ は、terms の有限列 $t_0, \cdots, t_{k-1}$ で、$\bar{a}$ の中の variables は $\bar{t}$ に occur しないようなもの。($\bar{b} = b_0, \cdots, b_{k-1}$)

◎ 勿論、term t_i の sort は、variable b_i の sort とそろっていないといけない。つまり、b_i が first order の variable なら t_i はふつうの意味での、L_2 での term、b_i が second order なら t_i は second order の variable, i.e., second order の term は variable のみ。

・$\Gamma_i(\bar{a} : \bar{t})$ は、Γ_i の中の variables $\bar{b}$ に terms $\bar{t}$ を同時に代入して得られる sequent を表わす。

・$\Gamma_n(\bar{t})$ の元となる formula を、この instance の <u>principal formula</u> とよぶ

4. adequate set R of rules について、L_2K_R とは、R の中の rules の instances を含んでもよいように証明図の概念を拡げた体系。L_2K_R の証明図を <u>R-proof</u> とよぶ。つまり、R-proof とは、(Ax) から出発して、L_2K の推論と、R の rules を適用して得られる、有限の木の形をした図形のこと。ある R-proof の一番下にある sequent を、その R-proof の <u>endsequent</u>(終式)とよぶ。

Rem. 1. rule $\{\langle\Gamma_i\rangle_{i\le n} : \bar{a} : \bar{b}\}$ は、

$$\forall \bar{v}[\forall \bar{u}\ \Gamma_0(\bar{u} : \bar{v}) \wedge \cdots \wedge \forall \bar{u}\ \Gamma_{n-1}(\bar{u} : \bar{v}) \to \Gamma_n(\bar{v})]$$

という公理を入れることと等価である。(話は逆。上の形の公理を rule に書きかえる。)

2. $n=0$ のときの rule $\{(\Gamma_i)_{i\le n}:\bar{a}:b\}$ は、extra initial sequent $\Gamma_0(\bar{t}), \Lambda$ を入れることにあたる。

Def. R-proof P が <u>quasi normal</u> とは、P の中の cut formula がすべて、ある rule $\in R$ のある instance の principal formula (と formula として同じ [= formula の occurrences in P を区別しない]) になっているか、atomic formula になっていること。

Theorem (partial cut elimination thm for L_2K_R) 0.2
与えられた R-proof P について、endsequent が P と同じで quasi normal な R-proof P^{cf} が存在する。

証明はふつうにできる、e.g. H. Schwichtenberg の Handbook article [10] を見よ。勿論、R が primitive rec. な限り、$P \mapsto P^{cf}$ は primitive rec. に (しかも PRA = Primitive Recursive Arithmetic で demonstrably に) とれる。

NB. quasi normal の定義で、cut formula として atomic なものを許したのは、$(b\forall)$, $(b\exists)$ の $s<t$ を cut formula とする (cut) があ

るから。

Corollary 0.3 sequent Γ が L_2K_R で証明できるなら、Γ に至る L_2K_R の R-proof P で、P の中の任意の formula が $\Gamma \cup \cup R \cup$ Atm の中のある formula の subformula になっているものが存在する。

但し 1. $\cup R \triangleq \bigcup \{ \Gamma_i(\bar{a}:\bar{t}) : \langle \{\Gamma_i\}_{i\leq n} : \bar{a} : \bar{b} \rangle \in R, i \leq n, \bar{t}$ は terms の列 $\}$

2. Atm $\triangleq$ the set of atomic and negated atomic formulae

（実際には、$s<t$, $s \not< t$ の形のみで十分）

3. formula の subformula は Gentzen 風のそれ, e.g., $\forall u A(u)$ の subformula として、$A(t)$（t は u と同じ sort の勝手な term）も許す。

つまり、P の中の formula は、Γ の中の formula の subformula か、ある rule $\in R$（の instance）に occur している formula の subformula か、$s<t$, $s \not< t$ の形に限るということ。

Rem. rule $\langle \{\Gamma_i\}_{i\leq n} : \bar{a} : \bar{b} \rangle$, $\Gamma_n = \{A_0, \cdots, A_{\ell-1}\}$ のかわりに、rule $\langle \{\Gamma_i'\}_{i\leq n+\ell} : \bar{a} : \bar{b} \rangle$,

$$\Gamma_i' = \begin{cases} \Gamma_i & , i<n \\ \neg A_j & , i=n+j, j<\ell \\ \phi & , i=n+\ell \end{cases}$$

を入れても等価である。よって、すべての rule $\in R$ がこのような

もの，i.e.，$\langle\langle\Gamma_i\rangle_{i\le n}:\bar{a}:\bar{b}\rangle\in R\Rightarrow\Gamma_n=\phi$ とすれば．Theorem は，cut formula として，$s<t$ の形のみ残る proof ができる，となる。（Corollary は こうしても同じ）

§2．AC, DC の iterated CA に対する conservation results．

ここでは，次の定理の A. Cantini [3] による証明を紹介する：formulae の集合 C_n, D_n を，

$$C_n \triangleq \begin{cases} \Pi^1_2 \ (\text{formulae} \ \cancel{\text{sentences}}) & ,n=0 \\ \Pi^1_3 & ,n=1 \\ \Pi^1_4 & ,n\ge 2 \end{cases} \qquad D_n \triangleq \begin{cases} \Sigma^{1-}_1 \ (\text{formulae} \ \cancel{\text{sentences}} \text{ w/o set parameters}) & ,n=0 \\ \Sigma^{1-}_2 & ,n=1 \\ \Sigma^{1-}_3 & ,n\ge 2 \end{cases}$$

として．

Theorem 1.1.

1. Σ^1_{n+1}-AC_0 is C_n [D_n] conservative over Π^1_n-CA_0 [$\Pi^{1,-}_n$-CA_0]

2. Σ^1_{n+1}-GDC_0 is C_n [D_n] conservative over Π^1_n-$CA_0^{<\omega^\omega}$ [$\Pi^{1,-}_n$-$CA_0^{<\omega^\omega}$]

3. Σ^1_{n+1}-$GDCR$ is C_n [D_n] conservative over Π^1_n-$CA_0^{<\omega^\omega}$ [$\Pi^{1,-}_n$-$CA_0^{<\omega^\omega}$]．

4. Σ^1_{n+1}-GDC is C_n [D_n] conservative over Π^1_n-$CA_0^{<\varepsilon_0}$ [$\Pi^{1,-}_n$-$CA_0^{<\varepsilon_0}$]．

ここに、例えば 1. は、$A \in C_n$ [$A \in D_n$] について、

$$\Sigma^1_{n+1}\text{-}AC_0 \vdash A \quad \Rightarrow \Pi^1_n\text{-}CA_0 \vdash A \ [\Pi^{1,-}_n\text{-}CA_0 \vdash A]$$

ということ, cf. Lemma 0.1

以下、この定理の証明をするが、n がいくつでも証明は同じなので、$n=0$ の場合の証明を述べ、$n>0$ の場合に必要な変更については最後で述べることにする。また absolute hierarchy に対するほうもほぼ同様なので、relativized のほうだけ扱う。

$\Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\alpha}$ ($\alpha = \omega, \omega^\omega, \varepsilon_0$) の中で次の定義をする。$\beta < \alpha$ について H^X_β を X の β-th jump, つまり $Hier^0_\beta(X, Y)$ なる Y の $(Y)_\beta$ のこととし (β は formal な variable) $Rc(H^X_\beta)$ と $Rc'(H^X_\beta)$ を

$Rc(H^X_\beta) \stackrel{\triangle}{=} \{Y \subseteq \omega : Y \text{ is rec. in } H^X_\beta\}$

$Rc'(H^X_\beta) \stackrel{\triangle}{=} \{e \in \omega : \forall x (\{e\}^{H^X_\beta}(x)\downarrow)\}$ = the set of codes of sets in $Rc(H^X_\beta)$

とする。formula $F(Y)$ について、$\forall Y \in Rc(H^X_\beta) F(Y)$ を、

$\forall Y \in Rc(H^X_\beta) F(Y) \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} \forall e \in Rc'(H^X_\beta) F(e)$, 但し、$F(e)$ は、$F(Y)$ の中のすべての、$t \in Y$ の形の (semi) formula を、$\{e\}^{H^X_\beta}(t) \simeq 0$ i.e., $\exists x\, [T^{H^X_\beta}(e, t, x)\ \&\ U(x) = 0]$ (U: result extracting function) でおきかえて得られる formula のこと。$\exists Y \in Rc(H^X_\beta) F(Y)$ も同様に定義される。

1. 初めに、$\Sigma^1_1\text{-}AC_0$ について、

ess-Σ^1_n, ess-Π^1_n formulae を定義する。

Def. 1. ess-Π^1_0 = ess-Σ^1_0 = Π^0_∞, the set of arithmetical formulae

2. ess-$\Pi^1_n \subseteq$ ess-Σ^1_{n+1} ; ess-$\Sigma^1_n \subseteq$ ess-Π^1_{n+1}

3. ess-Σ^1_n, ess-Π^1_n はともに、$\wedge, \vee, \forall n, \exists n, \forall n<t, \exists n<t$ (1st order quantifiers) について閉じている。

4. $A \in$ ess-Σ^1_n [ess-Π^1_n] $\Rightarrow$ $\exists X A \in$ ess-Σ^1_n [$\forall X A \in$ ess-Π^1_n].

(n $\neq$ 0)

ここでは Σ^1_1-AC_0 は、L_2K に次の extra な公理(= premisses なしの rule)と rule を加えて得られる L_2K_R のこととする。公理は次の3種:

1. Γ, A , A は =, prim. rec. function に関する公理を quantifier-free に書いたもの. e.g., $s+1 \neq 0$ や、$t \neq s$, $t \notin X$, $s \in X$ (s, t: 任意の terms) 等.

Rem. ここの証明では、上の公理を quantifier-free にしておかなくてもよい。例えば $\forall x(x+1 \neq 0)$ でも可。§3 ではこうしておいたほうがよい, i.e., Σ^0_1 formulae だけからなる proof を扱いたいとき。

2. Induction Axiom は.

$$\Gamma, 0 \notin X, \exists n(n \in X \wedge n+1 \notin X), \forall m(m \in X)$$

3. Σ^0_0-CA は.

$$\Gamma, \exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow A(n)) \qquad A \text{ は } \Sigma^0_0 \text{ formula.}$$

rule は次の1種:

$$\Pi^0_2\text{-}AC \quad \frac{\Gamma, \forall x \exists X A(x, X)}{\Gamma, \exists Y \forall x A(x, (Y)_x)} \qquad A : \Pi^0_2 \text{ formula}$$

Theorem 0.2, Corollary 0.3 より次がわかる: Γ が ess-$\Sigma^1_1 \cup$ ess-Π^1_1 formulae だけからなる sequent で Σ^1_1-AC_0 で証明できるとする。このとき、Γ に至る Σ^1_1-AC_0 での quasi-normal proof P があって、P の中の cut formulae はすべて Σ^1_1 (Π^0_∞ を含む) で、かつ P の中の formulae はすべて ess-Σ^1_1 か ess-Π^1_1 である。

Def. $A \in$ ess-$\Sigma^1_1 \cup$ ess-Π^1_1 と A に occur しない set parameter V について、formula $A^V_{n,m}$ $(n, m < \omega)$ は、A の中のすべての $\forall Y$ を $\forall Y \in Rc(H^V_n)$ で、すべての $\exists Y$ を $\exists Y \in Rc(H^V_m)$ でおきかえて得られる formula を表わす。$A^V_{n,m}$ (ここの n, m は numerals で formal な variables でない [としてよい]) には、free variable V がふえている (正確には $Hier^0_{n+m}(V, Y)$ なる Y も occur していて、$Hier^0_{n+m}(V, Y) \to A^V_{n,m}$ である。)。sequent $\Gamma = \{A, B, \cdots\} \subseteq$ ess-$\Sigma^1_1 \cup$ ess-Π^1_1 については、

$$\Gamma^V_{n,m} \triangleq \{A^V_{n,m}, B^V_{n,m}, \cdots\}$$

明らかに、次の (persistency) が成立する:

(persistency) $n \le n' \le m' \le m \Rightarrow \Pi^0_1$-$CA_0 \vdash A^V_{n',m'} \to A^V_{n,m}$

Def. Proofs の長さ。

P を proof, Γ をその endsequent, $k < \omega$ について $P \overset{k}{\vdash} \Gamma$ を、

1. P が公理=始式だけからなるとき: $P \overset{k}{\vdash} \Gamma$ holds for all $k < \omega$

2. $P_0 \overset{k'}{\vdash} \Gamma_0$, $P_1 \overset{k'}{\vdash} \Gamma_1$, $k' < k$ で、P の最後が

$$P = \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots P_0 & \vdots P_1 \\ \Gamma_0 & \Gamma_1 \end{array}}{\Gamma}$$

(P の immediate subproofs が P_0, P_1) のとき、$P \vdash^k \Gamma$.

つまり、$P \vdash^k \Gamma$ は 木としての P の depth $\leq k$ ということ。

Theorem. 1.2　P を Σ^1_1-AC_0 の quasi normal proof, $P \vdash^k \Gamma$, $\Gamma \subseteq ess$-$\Sigma^1_1 \cup ess$-Π^1_1 とする。U を P に occur しない set parameter, X を Γ に occur する set parameters すべてを含む列 $X_0, \cdots, X_q$ とし、$X \notin Rc(H^U_n)$ を formulae の集合 $\{X_0 \notin Rc(H^U_n), \cdots, X_q \in Rc(H^U_n)\}$ のこととする。$g_k(n) \doteq n + 2^k$ とおくと、任意の $n < \omega$ について、

Π^0_1-$CA_0 \vdash X \notin Rc(H^U_n), \Gamma^U_{n, g_k(n)}$

Thm. 1.1.1 の証明。Σ^1_1-$AC_0 \vdash \forall X \exists Y A(X, Y)$, $A \in \Pi^0_\infty$ とする。Thm 1.2 より $n = 0$ とおいて、Π^0_1-$CA_0 \vdash X \notin Rc(H^U_0), \exists Y \in Rc(H^U_m) A$ for some $m < \omega$. U として X (と、A に occur する set parameters の rec. join) をとって、Π^0_1-$CA_0 \vdash \forall X \exists Y \in Rc(H^X_m) A$。各 $Y \in Rc(H^X_m)$ は Π^0_1-CA_0 で set として存在するから Π^0_1-$CA_0 \vdash \forall X \exists Y A$.　//

Thm. 1.2 の証明。P の構成に関する induction。

1) P が $\dfrac{\Gamma, \forall x \exists Y A(x, Y)}{\Gamma, \exists Z \forall x A(x, (Z)_x)}$ $A \in \Pi^0_2$ で終っているとき。

IH より $\exists k_0 < k$ について、Π^0_1-CA_0 で

$X \notin Rc(H^U_n), \Gamma^U_{n, m_0}, \forall x \exists Y \in Rc(H^U_{m_0}) A(x, Y)$

$m_0 = n + 2^{k_0}$.

Case 1. Γ^{v}_{n,m_0} のとき： $m_0 < m = n + 2^k$ と (persistency) よりOK.

Case 2. Γ^{v}_{n,m_0} でないとき： $\forall x \exists Y \in Rc(H^{v}_{m_0}) A(x, Y)$ は、書き直すと、

$\forall x \exists y \in Rc'(H^{v}_{m_0}) A(x, y)$ で、$y \in Rc'(H^{v}_{m_0})$ は Π^0_2 in $H^{v}_{m_0}$,

$A(x, y)$ は $t \in Y$ を $\exists v [T^{H^{v}_{m_0}}(y, t, v) \ \& \ U(v) = 0]$ に、$t \notin Y$ を

$\exists v [T^{H^{v}_{m_0}}(y, t, v) \ \& \ U(v) \neq 0]$ に書きかえることにより、$B(x,y) \overset{\triangle}{\Leftrightarrow}$

$y \in Rc'(H^{v}_{m_0}) \ \& \ A(x, y)$ は Π^0_2 in $H^{v}_{m_0}$ と思ってよい。Z を、

$u \in (Z)_x \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} \exists y (y = \mu y B(x, y) \ \& \ \{y\}^{H^{v}_{m_0}}(u) \simeq 0)$

$\Leftrightarrow \forall y (y = \mu y B(x, y) \to \{y\}^{H^{v}_{m_0}}(u) \simeq 0)$

として、Z は Δ^0_3 in $H^{v}_{m_0}$。仮定より、$m_0 + 2 \leq m$ だから (persistency)

より $\exists Z \in Rc(H^{v}_{m}) \forall x A(x, (Z)x)$。

2) P が (cut) で終っているとき。P の最後を、

$$\frac{\Gamma, A \qquad \neg A, \Lambda}{\Gamma, \Lambda}$$

$A \in \Sigma^1_1$ とすると IH より $\exists k_0 < k$ について、

$\forall n \in \omega$ について、

$X \notin Rc(H^{v}_{n}), \Gamma^{v}_{n,m_0}, A^{v}_{n,m_0} \quad \cdots (1) \qquad m_0 = n + 2^{k_0}$

$X \notin Rc(H^{v}_{n}), \Lambda^{v}_{n,m_0}, (\neg A)^{v}_{n,m_0} \quad \cdots (2)$

(2) で n は任意だったから、n として m_0 をとって

$X \notin Rc(H^{v}_{m_0}), \Lambda^{v}_{m_0,\ell}, (\neg A)^{v}_{m_0,\ell} \cdots (3) \qquad \ell = m_0 + 2^{k_0}$

A は Σ^1_1 だから、$\neg(A^{v}_{n,m_0})$ と $(\neg A)^{v}_{m_0,\ell}$ は同じ formula、よって (1)

(3) で cut して、

$X \notin Rc(H^{v}_{n}), X \notin Rc(H^{v}_{m_0}), \Gamma^{v}_{n,m_0}, \Lambda^{v}_{m_0,\ell}$

(persistency) より、

$X \notin Rc(H^v_n),\ X \in Rc(H^v_{m_0})$; $\Gamma^v_{n,\ell},\ \neg\Gamma^v_{n,m_0}$; $\Lambda^v_{n,\ell},\ \neg\Lambda^v_{m_0,\ell}$

$(n \leq m_0 \lneq \ell)$ 従って、$X \notin Rc(H^v_n)$, $\Gamma^v_{n,\ell}$, $\Lambda^v_{n,\ell}$.

$\ell = n + 2^{k_0} + 2^{k_0} \leq n + 2^k$ より再び(persistency)で OK.

-/-

Rem. 上の Thm 1.2 の証明より、Π^0_1-CA_0 は Σ^1_1-ACR について閉じている、Σ^1_1-ACR は Π^0_1-CA_0 で derived rule,

$\Pi^0_1\text{-}CA_0 \vdash \forall x \exists Y A(x,Y)$ w/ $A \in \Sigma^1_1 \Rightarrow \Pi^0_1\text{-}CA_0 \vdash \exists Z \forall x A(x,(Z)_x)$

もわかる。

2. Σ^1_1-GDC_0 と Π^0_1-$CA_0^{<\omega^\omega}$.

Σ^1_1-GDC_0 は、上の Σ^1_1-AC_0 での Π^0_2-AC を次の Π^0_2-GDC におきかえて得られる：

$$\Pi^0_2\text{-}GDC\quad \frac{\Gamma,\ \forall n \exists Y A(n,X,Y)}{\Gamma,\ \exists Z \forall n A(n,(Z)_n,(Z)_{n+1})} \qquad A \in \Pi^0_2$$

ここに、X は下式 $\Gamma, \exists Z \forall n A(n,(Z)_n,(Z)_{n+1})$ に occur しない。

Σ^1_1-GDC_0 の proofs の長さや $A^v_{\alpha,\beta}$ の定義は前と同様とする(但しここでは α, β は $<\omega^\omega$ なる formal な variables).

Theorem 1.3 P を Σ^1_1-GDC_0 の quasi normal proof, $P \vdash^K \Gamma$, $\Gamma \subseteq ess\text{-}\Sigma^1_1 \cup ess\text{-}\Pi^1_1$, U を P に occur しない set parameter とする。Q を P の sub-proof, Δ を Q の endsequent とする。各 $k \leq K$ について、$g_k : \omega^{K+1} \to \omega^{K+1}$ を、$g_k(\alpha) = \alpha + \omega^k$ で定義する。

X を Δ に occur するすべての set parameters を含む列 とすると、

$Q \vdash^{k} \Delta$ & $k \leq K \Rightarrow \Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\omega^\omega} \vdash \alpha < \omega^{K+1}, X \notin Rc(H^{\vee}_{\alpha}), \Delta^{\vee}_{\alpha, g_k(\alpha)}$

Proof Q の構成に関する induction。ここでの (persistency) は、

(persistency) 各 $K < \omega$ について、

$\Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\omega^\omega} \vdash \forall \alpha, \alpha', \beta', \beta < \omega^{K+1} (\alpha \leq \alpha' \leq \beta' \leq \beta \ \&\ A^{\vee}_{\alpha', \beta'} \to A^{\vee}_{\alpha, \beta})$

1) Q が Π^0_2-GDC で終っているときに Q の最後を、

$$\frac{\Delta, \forall n \exists Y A(n, X, Y)}{\Delta, \exists Z \forall n A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})}$$

とする。[H より $\exists k_0 < k$ について

$\alpha < \omega^{K+1}, X \notin Rc(H^{\vee}_{\alpha}), \Delta^{\vee}_{\alpha, \alpha+\omega^{k_0}}, \forall n \exists Y \in Rc(H^{\vee}_{\alpha+\omega^{k_0}}) A(n, X, Y)$.

(以下、X 以外の parameter は省略) $\alpha < \omega^{K+1}$ を fix。

Case 1. $\exists n \ (\Delta^{\vee}_{\alpha+\omega^{k_0} n, \alpha+\omega^{k_0}(n+1)})$ のときに (persistency) より

$\Delta^{\vee}_{\alpha, \alpha+\omega^k}$ となり O.K.

Case 2. O.W. に上より $\forall n \forall x \in Rc'(H^{\vee}_{\alpha+\omega^{k_0} n}) \exists y \in Rc'(H^{\vee}_{\alpha+\omega^{k_0}(n+1)})$ s.t. $A(n, x, y)$

空集合 ϕ の code, index x_0 を fix して、$B(w, n)$ を次の formula で与える:

'w は長さ $n+1$ の列' & $(w)_0 = x_0$ & $\forall m < n [(w)_m \in Rc'(H^{\vee}_{\alpha+\omega^{k_0} m})$

& $(w)_{m+1} = \mu y. (y \in Rc'(H^{\vee}_{\alpha+\omega^{k_0}(m+1)})$ & $A(m, (w)_m, y))]$

ind. on n で $\forall n \exists! w B(w, n)$ がわかる。W を、

$u \in (W)_n \overset{\Leftrightarrow}{\scriptstyle def} \exists w (B(w, n) \ \&\ u \in' (w)_n)$

$\leftrightarrow \forall w (B(w, n) \to u \in' (w)_n)$

$u \in' (w)_n \overset{\Leftrightarrow}{\scriptstyle def} \{(w)_n\}^{H^{\vee}_{\alpha+\omega^{k_0} n}}(u) \simeq 0$.

とおると、$W \in R_c(H^{\vee}_{\alpha+\omega^{k_0+1}}) \subseteq R_c(H^{\vee}_{\alpha+\omega^k})$ かつ、

$\forall n\, A(n, (W)_n, (W)_{n+1})$ となる。

-/.

Rem. 上の証明から容易に次がわかる：いま Σ^1_1-RDC_0 を、Σ^0_0-CA_0 に次の公理 Σ^1_1-RDC を加えた理論とする。

$$\Sigma^1_1\text{-}RDC: \forall n \forall X [F(n,X) \to \exists Y (F(n+1,Y) \,\&\, A(n,X,Y))] \to$$

$$\to \forall X [F(0,X) \to \exists Y \forall n [(Y)_0 = X \,\&\, F(n,(Y)_n) \,\&\, A(n,(Y)_n,(Y)_{n+1})]]$$

for $F, A \in \Sigma^1_1$.

このとき、Σ^1_1-RDC_0 is Π^1_2 conservative over Π^0_1-$CA^{<\omega^\omega}_0$.

4. Σ^1_1-GDC と Π^0_1-$CA^{<\varepsilon_0}_0$.

Σ^1_1-GDC^* を、2. のように Σ^1_1-GDC_0 を書き、ω-rule を入れて、$(b\forall)$、$(\forall)$ を除いた semi-formal system とする：

$$\omega\text{-rule} \quad \frac{\cdots \quad \overset{\vdots\, P_n}{\Gamma, A(n)} \quad \cdots \qquad \forall n<\omega}{\Gamma, \forall x A(x)} \Big\} P$$

Σ^1_1-GDC^* の proofs の長さは前と同様に定義する。とくに、上の ω-rule で、

$$P_n \vdash^{\alpha_n} \Gamma, A(n) \;\&\; \alpha_n < \alpha \text{ for } \forall n<\omega \;\Rightarrow\; P \vdash^{\alpha} \Gamma, \forall x A(x).$$

Σ^1_1-GDC^* の proof が quasi-normal とは、その中の cut formulae がすべて Σ^1_1 のこと。[10] と同様にして、次がわかる：(cf. §6)

1). Γ を sentences の集合として、

Σ^1_1-GDC $\vdash \Gamma \Rightarrow \exists$ Σ^1_1-GDC* の proof P s.t.

$$P \vdash^{<\omega+\omega} \Gamma$$

2) $\forall$ Σ^1_1-GDC* の proof P $\exists$ Σ^1_1-GDC* の quasi normal proof P' s.t.

$[\, P \vdash^{<\omega+\omega} \Gamma \Rightarrow P' \vdash^{<\varepsilon_0} \Gamma \,]$

$(\, P \vdash^{<\alpha} \Gamma \Leftrightarrow P \vdash^{\beta} \Gamma$ for $\exists \beta < \alpha \,)$

Thm 1.3 と同様にして、

Theorem 1.4. 各 $\alpha_0 < \varepsilon_0$ について次が成立。P を Σ^1_1-GDC* の quasi-normal proof で $P \vdash^{\alpha_0} \Gamma$ とする。$\Gamma \subseteq$ ess-$\Sigma^1_1 \cup$ ess-Π^1_1. U を P に occur しない set parameter. Q を P の subproof で $Q \vdash \Delta$ とする。各 $\beta \leq \alpha_0$ について $g_\beta : \omega^{\alpha_0+1} \to \omega^{\alpha_0+1}$ を $g_\beta(\alpha) = \alpha + \omega^\beta$ とする。X を Δ に occur するすべての set parameters すべてを含む列として、

$$Q \vdash^{\beta} \Delta \ \&\ \beta \leq \alpha_0 \Rightarrow \Pi^0_1\text{-}CA^{<\omega^{\alpha_0+1},*} \vdash \alpha \,R\, \omega^{\alpha_0+1}, X \notin R_e(H^U_\alpha), \Delta^U_{\alpha, g_\beta(\alpha)}.$$

ここに Π^0_1-$CA^{<\omega^{\alpha_0+1},*}$ は Π^0_1-$CA^{<\omega^{\alpha_0+1}}$ に対応する semi-formal system w/ ω-rule.

ここまでの議論を算術化・形式化して partial truth definition for Π^0_∞ formulae を経て、Π^1_2 sentence A について、

$$\Sigma^1_1\text{-GDC} \vdash A \Rightarrow \exists \alpha_0 < \varepsilon_0 (\, \Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\varepsilon_0} \vdash A^U_{\alpha, \alpha+\omega^{\alpha_0}, \alpha \,R\, \omega^{\alpha_0+1}})$$

$\alpha = 0$ とおけばよい。

3. Σ^1_1-GDCR と Π^0_1-$CA_0^{<\omega^\omega}$.

Σ^1_1-GDCR は、公理として、full induction

$\Gamma,\ A(0)\ \&\ \forall n(A(n) \to A(n+1)) \to \forall n A(n)$

があり、'rule' として次の Σ^1_1-GDCR がある：

$$\Sigma^1_1\text{-GDCR} \quad \frac{\forall n \forall X \exists Y A(n, X, Y)}{\exists Z \forall n\ A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})} \qquad A \in \Pi^0_\infty$$

Σ^1_1-GDCR の proof の中で使われている 'rule' Σ^1_1-GDCR の回数を数える：　P を Σ^1_1-GDCR の proof s.t. $P \vdash \Gamma$ とする。

1) P が公理だけからなるとき、$P \vdash^k \Gamma$ holds for $\forall k<\omega$.

2) P の最後が Σ^1_1-GDCR 以外で P の immediate sub-proof(s) P_0 [P_1] について、$P_0 \vdash^k \Gamma_0$ [$P_1 \vdash^k \Gamma_1$] なら、

$P \vdash^k \Gamma$

3) P の最後が Σ^1_1-GDCR で、P の immediate sub-proof P_0 について $P_0 \vdash^{k_0} \Gamma_0$ for $\exists k_0 < k$ なら $P \vdash^k \Gamma$。

各 $k<\omega$, $\alpha<\omega^\omega$ と variable U について、

$R^U_{k,\alpha} \doteqdot \bigcup_{\beta<\alpha} Rc(H^U_{\omega^k\cdot\beta})$ 　とする。

set parameter U が occur しない formula A について、（A は $\notin$ less-$\Sigma^1_1 \cup$ less-Π^1_1 でよい）$A^{R^U_{k,\alpha}}$ を、A の中の $\forall Y$, $\exists Y$ を一様に $\forall Y \in R^U_{k,\alpha}$, $\exists Y \in R^U_{k,\alpha}$ でおきかえた formula とする。　このとき、

Theorem 1.5. P を Σ^1_1-GDCR の proof で $P \vdash \Gamma$ とする。
(P は quasi normal でなくてよいし、Γ は ess-Σ^1_1 ∪ ess-Π^1_1 でない)
U を P に occur しない set parameter, X を Γ に occur するすべての set parameters すべてを含む列として、$k < \omega$ と $\alpha < \omega^\omega$, α : limit ordinal について.

$$P \vdash^{k} \Gamma \Rightarrow \Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\omega^\omega} \vdash X \notin R^U_{k,\alpha}, \Gamma^{R^U_{k,\alpha}}$$

Proof. P の長さについての induction. P の最後が Σ^1_1-GDCR のとき.

$$\frac{\forall n \forall X \exists Y A(n, X, Y)}{\exists Z \forall n A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})}$$

$k = k_0 + 1$ とおくと IH より.

$$\forall \text{limit } \alpha < \omega^\omega \quad \Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\omega^\omega} \vdash \forall n \forall X \in R^U_{k_0,\alpha} \exists Y \in R^U_{k_0,\alpha} A(n, X, Y)$$

(parameters は略) --- (1)

与えられた limit $\alpha < \omega^\omega$ について. $X_0 \in R^U_{k,\alpha}$ とすると.
$X_0 \in Rc(H^U_{\omega^{k_0}\cdot\beta})$ for $\exists \beta < \alpha$. よって $X_0 \in Rc(H^U_{\omega^{k_0}\cdot\delta_0}), k_0 = k+1$
$\delta_0 = \omega\beta$. $\gamma \triangleq \omega\beta + \omega$ として (1) の α を γ と思えば $(Z)_n$ と δ_n を recursive に, $(Z)_0 = X_0$; $\delta_0 = \omega\beta$,
$(Z)_{n+1} \in Rc(H^U_{\omega^{k_0}\cdot\delta_{n+1}})$ s.t. $A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})$ & $\delta_{n+1} < \gamma$
とっていけて. $Z \in Rc(H^U_{\omega^{k_0}\cdot\gamma})$. $\omega^{k_0}\gamma = \omega^k(\beta+1)$ &
$\beta + 1 < \alpha$: limit より $Z \in R^U_{k,\alpha}$ となる

//

ここまでの証明で parameter U を suppress すれば、対応する結果が absolute hierarchy についても得られる。

以下、$n>0$ の場合について述べる。Π_n^1-$CA_0^{<\alpha_0}$ ($\alpha_0=\omega, \omega^\omega, \varepsilon_0$) の中で、$\beta<\alpha_0$ について $H_\beta^X(n)$ を、$Hier_\beta^n(X,Y)$ なる Y の $(Y)|_\beta$ のこととし、

$Rc(H_\beta^X(n)) \doteq \{Y\subseteq\omega . Y$ *is rec. in* $H_\beta^X(n)\}$

$Rc'(H_\beta^X(n)) \doteq$ *the set of codes of sets in* $Rc(H_\beta^X(n))$

と定義する。Formula $F(Y)$ について、$\forall Y\in Rc(H_\beta^X(n))F(Y)$, $\exists Y\in Rc(H_\beta^X(n))F(Y)$ は前と同様に定義される。

Def. $A\in ess$-$\Sigma_{n+1}^1\cup ess$-Π_{n+1}^1 と A に occur しない set parameter V について formula $A_{\alpha,\beta}^V$ ($\alpha,\beta<\alpha_0$) を帰納的に定義する：

1. $A\in ess$-$\Sigma_n^1\cup ess$-$\Pi_n^1 \Rightarrow A_{\alpha,\beta}^V \doteq A$

2. operation $A\mapsto A_{\alpha,\beta}^V$ は second order quantifiers 以外の logical operator と commute, e.g., $(B\circ C)_{\alpha,\beta}^V \doteq B_{\alpha,\beta}^V\circ C_{\alpha,\beta}^V$, $\circ\in\{\wedge,\vee\}$.

3. $(\forall Y B(Y))_{\alpha,\beta}^V \doteq \forall Y\in Rc(H_\alpha^V(n))\ B(Y)_{\alpha,\beta}^V$ if $\forall Y B(Y)\notin ess$-$\Sigma_n^1\cup ess$-Π_n^1

$(\exists Y B(Y))_{\alpha,\beta}^V \doteq \exists Y\in Rc(H_\beta^V(n))\ B(Y)_{\alpha,\beta}^V$ if $\exists Y B(Y)\notin ess$-$\Sigma_n^1\cup ess$-Π_n^1.

Rem. $A=\forall Y B(Y)$ [$=\exists Y B(Y)$] $\in ess$-$\Sigma_{n+1}^1\cup ess$-Π_{n+1}^1 のとき、$A_{\alpha,\beta}^V$ は β には [α には] 依存しない。

sequent Γ について、sequent $\Gamma_{\alpha,\beta}^V$ は前と同様に定義される。

Def. 1. $(V=L)_r$ を、Σ_4^1-sentence で、relativized constructibility hypothesis $\exists Z\subseteq\omega\ \forall X\subseteq\omega\ \exists W\subseteq\omega$ ["W is a well ordering" & $X\in Rc(H_\alpha^Z)$ for some α in the field of the well ordering W] を表わすとする。

2. theory T_n を、 $T_n \doteq \begin{cases} \Pi_n^1\text{-}CA_0 & ,n=1,2 \\ \Pi_n^1\text{-}CA_0+(V=L)_r & ,n\geq 3\end{cases}$ とおく。

このとき、次が成立する。

Lemma cf. [3]

a) $T_n \vdash \Sigma^1_n\text{-}AC$

b) $T_n \vdash \forall Y \in H^X_1(n) F(Y) \to \forall Y F(Y)$ for $A \in ess\text{-}\Pi^1_n$.

c) $(n \geq 3)$ T_n is Π^1_4-conservative over $\Pi^1_n\text{-}CA_0$.

1. $\Sigma^1_{n+1}\text{-}AC_0$ と $\Pi^1_n\text{-}CA_0$。

Lemma a), b) を使えば、$n=0$ のときと同様にして、Π^1_{n+2} formula $\forall X \exists Y A(X,Y)$ w/o set parameters に対して、

$$\Sigma^1_{n+1}\text{-}AC_0 \vdash \forall X \exists Y A \Rightarrow T_n \vdash \forall X \exists Y \in Rc(H^X_k(n)) A(X,Y)$$

for some $k<\omega$

$$\Rightarrow T_n \vdash \forall X \exists Y A(X,Y)$$

となり、Lemma c) より O.K.。

2. $\Sigma^1_{n+1}\text{-}GDC_0$ と $\Pi^1_n\text{-}CA_0^{<\omega^\omega}$.

theory S_n を、

$$S_n \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} \Pi^1_n\text{-}CA_0^{<\omega^\omega} & , n=1,2 \\ \Pi^1_n\text{-}CA_0^{<\omega^\omega} + (V=L)_r & , n \geq 3 \end{cases}$$

と、Lemma c) に対応する Lemma : S_n is Π^1_4-conservative over $\Pi^1_n\text{-}CA_0^{<\omega^\omega}$ より、$n=0$ と同様にて OK

4. $\Sigma^1_{n+1}\text{-}GDC$ と $\Pi^1_n\text{-}CA_0^{<\varepsilon_0}$.

2. と同様にして、$n=0$ の場合と同じようにできる。但し、ω-rule の入った $\Pi^1_n\text{-}CA^{<\alpha,*}$ or $\Pi^1_n\text{-}CA^{<\alpha,*} + (V=L)_r$ $(\alpha < \varepsilon_0)$ で、

$\beta<\varepsilon_0$ なる長さの proof で証明される formula $A^x_{\gamma,\delta}$ ($\gamma,\delta<\varepsilon_0$. A は Σ^1_{n+1}) を partial truth def. によって '外へ出す', Π^1_n-$CA_0^{<\varepsilon_0}$ or Π^1_n-$CA_0^{<\varepsilon_0}+(V=L)_r$ で証明するときには、restricted ind. しかないから、β までの超限帰納法は Π^1_n-$CA_0^{<\varepsilon_0}$ の中で set として存在する formula に対してしか適用できないから少し注意を要する。

3. Σ^1_{n+1}-GDCR と Π^1_n-$CA_0^{<\omega^\omega}$。

各 $k<\omega$, $\alpha<\omega^\omega$ と variable U について、

$$R^U_{k,\alpha}(n) \equiv \bigcup_{\beta<\alpha} Rc(H^U_{\omega^k\cdot\beta}(n))$$

として、U が occur しない formula A について、$A^{R^U_{k,\alpha}(n)}$ を、A の中のすべての set quantifiers を一様に $R^U_{k,\alpha}(n)$ に相対化・制限して得られる formula とする。Lemma a), b), c) の S_n (2. で定義された) に対する analogue を使って、$n=0$ と同様にして O.K.

$n>0$ のときの absolute hierarchy Π^1_n-$CA_0^{<\alpha}$ に対する定理は、上の証明で、parameter U を suppress して、かつ、次が成立すれば O.K.: $\Pi^{1,-}_n$-$CA_0^{<\alpha}+V=L$ is $\Sigma^{1,-}_3$-conservative over $\Pi^{1,-}_n$-$CA_0^{<\alpha}$ ($\alpha=\omega,\omega^\omega,\varepsilon_0$)。但し、$V=L$ は Π^1_3 sentence で書いた constructibility hypothesis ($(V=L)_r$ in P.28 の Z を $Z=\phi$ としたもの) を表わす。(筆者はこの Lemma が成立するかどうか知らない。ついでに言うと、Lemma c) の証明も知らない。ので)

または次のようにしてもよい。相対化された Π^1_n-$CA_0^{<\alpha}$ に対する結果を使えばよい。つまり、次を示せば十分:

Lemma. Π^1_n-$CA_0^{<\alpha}$ is $\Sigma^{1,-}_{n+1}$-conservative over $\Pi^{1,-}_n$-$CA_0^{<\alpha}$ for (at least) $\alpha = \omega, \omega^\omega, \varepsilon_0$.

このLemmaは、各$\beta, \gamma < \alpha$についてある$\delta < \alpha$が実際にとれて($\delta = \gamma + \beta$程度に)、

$$\Pi^{1,-}_n\text{-}CA_0^{<\alpha} \vdash \forall X \in Rc(H_\gamma(n))\, \exists Y \in Rc(H_\delta(n))\, Hier^n_\beta(X, Y)$$

となることからわかる。但し、$H_\gamma(n)$は$Hier^n_\gamma(\phi, Y)$なるYの$(Y)_\gamma$のこと。

<u>付記</u>. Theorem 1.1の証明論を使った証明としては、上記のA. Cantiniによるもののほかに、S. Feferman & W. SiegによるSkolem operator theoryを使った証明が[1]のII, §2にある。

§3 WKL_0とPRA

この§では次の定理を証明する：

Theorem 2.1 WKL_0 is Π^0_2-conservative over Σ^0_0-CA_0.

証明は、1) $WKL + \Delta^0_1$-CAをそれと同値なΣ^0_1-Sepにおきかえて、Σ^0_1-Sep_0 is Π^0_2-conservative over Σ^0_0-CA_0を示すのと、2) 直接、WKL_0を扱って示すのの2通り与える。

Def. 1. (WKL = Weak König Lemma). function variable (unary) f (は、L_2に入っていると思ってもいいし、又は、$\forall x \exists! y\, (x, y) \in X$なる$X$

と思ってもいい）に対して、

$c \in T_f \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} f(c) = 1$

$BT(T_f) \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} \forall c \forall d\, [(c * d \in T_f \to c \in T_f) \,\&\, (c \in T_f \Rightarrow c \in {}^{<\omega}2)]$

但し、${}^{<\omega}2 \overset{\wedge}{=}$ 0-1の有限列全体の集合；$d, c \in {}^{<\omega}2$ に対して、

$c * d$ は c と d の concatenation，$lh(c) \overset{\wedge}{=} c$ の長さ、を表わす。

また、function variable g について、$\bar{g}x \overset{\wedge}{=} \langle g(0), g(1), \cdots, g(x \dot{-} 1) \rangle$。

このとき、WKLとは、次の公理を表わす：

WKL：$\forall f \in {}^{\omega}2\, [BT(T_f) \,\&\, \forall g \in {}^{\omega}2\, \exists x (\bar{g}x \notin T_f) \to \exists x \forall c \in {}^{<\omega}2 (lh(c) = x$

$\to c \notin T_f)]$

但し、$f \in {}^{\omega}2 \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} \forall x\, (f(x) \leq 1)$

2. 理論 WKL_0 は、$\Sigma^0_0\text{-}CA_0 + \Sigma^0_1\text{-}IA + \Delta^0_1\text{-}CA + WKL$ のこと。

3. (Σ^0_1-Sep = Σ^0_1-Sepation Axiom)。Σ^0_1-Sep は次の公理(図式)：

Σ^0_1-Sep： $\forall n \neg (An \,\&\, Bn) \to \exists X \forall n [(An \to n \in X) \,\&\, (n \in X \to \neg Bn)]$

A, B は Σ^0_1-formulae.

4. 理論 $\Sigma^0_1\text{-}Sep_0$ は、$\Sigma^0_0\text{-}CA_0 + \Sigma^0_1\text{-}IA + \Sigma^0_1\text{-}Sep$ のこと。

次の事実が知られている：

Proposition (cf. [13]) $WKL_0 = \Sigma^0_1\text{-}Sep_0$, i.e., $\Sigma^0_1\text{-}IA_0$ 上で $WKL + \Delta^0_1\text{-}CA \Leftrightarrow \Sigma^0_1\text{-}Sep$.

1) Theorem 2.1 の第1証明。上の Prop. より $\Sigma^0_1\text{-}Sep_0$ is Π^0_2-conservative

over Σ^0_0-CA_0 を示せばよい。初めに、証明論が使い易いように Σ^0_1-Sep_0 を L_2K を使って書き直す。公理は L_1 の constants に関する公理を quantifier-free の形で書いたもの cf. P.18. 推論は L_2K のそれに次の2つを加える:

1) Σ^0_1-Sep :

$$\frac{\Gamma, \neg A_0(m,n) \vee \neg B_0(k,n) \qquad \exists m \exists n \exists k [(A_0(m,n) \,\&\, n \notin X) \vee (n \in X \,\&\, B_0(k,n))], \Gamma}{\Gamma}$$

ここに、イ) $A_0, B_0 \in \Sigma^0_0$　ロ) 左上式の m, n, k は eigenvariables i.e., Γ に free に occur しない ($\neg A_0(0,0) \vee \neg B_0(0,0)$ にも!)

2) Σ^0_1-IA :

$$\frac{\Gamma, \exists m B(m,0) \qquad \Gamma, b \not< t, \neg B(c,b), \exists m B(m,b') \qquad \neg B(c,t), \Gamma}{\Gamma}$$

ここに イ) $B \in \Sigma^0_0$　ロ) b, c は eigenvariables　ハ) t は term　ニ) b' は $b+1$ のこと。

明らかにこう書いた Σ^0_1-Sep_0 は元のそれと同値である。(Σ^0_0-CA に相当する公理・推論は入れていない。何故なら、Σ^0_1-Sep から、それは出てくるから。) さらに、Σ^0_1-IA_0 (くわしくは、Σ^0_1-IA_0 マイナス Σ^0_0-CA と呼ぶべき、次の Σ^0_0-IA_0 も同様) と Σ^0_0-IA_0 を、Σ^0_1-IA_0 は上のように書いた Σ^0_1-Sep_0 から推論 Σ^0_1-Sep を除いて得られる体系として、また、Σ^0_0-IA_0 は、Σ^0_1-IA_0 から推論 Σ^0_1-IA を除き、Σ^0_0-formulae についての induction axiom を入れた

体系として定義する。(Σ^0_0-IA_0 のほうは、Gentzen 流に書かなくてよいが)このとき次の Lemma が成立する。

Lemma 1. $\Gamma \cup \{A_1, \cdots, A_n\} \subseteq \Sigma^0_1$ $(n \geq 0)$ について、

Σ^0_1-$IA_0 \vdash \Gamma, \exists m A_1(m), \cdots, \exists m A_n(m) \quad \Rightarrow$

Σ^0_0-$IA_0 \vdash \Gamma, \exists m < t_1 A_1, \cdots, \exists m < t_n A_n$ for some terms $t_1, \cdots, t_n$ s.t. $t_1, \cdots, t_n$ に occur する variables は (1st order!) は Γ, $\exists m A_1(m), \cdots, \exists m A_n(m)$ に occur するもののみ, i.e. 各 $t_i \equiv t_i(\bar{a})$ はある $\bar{a}$ に関する primitive rec. function $f_i(\bar{a})$ に対応している。

このLemma から次が出る:

Lemma 2. $\Gamma \subseteq \Sigma^0_1$ & X does not occur in Γ として、

Σ^0_1-$IA_0 \vdash \exists m \exists n \exists k [(A_0(m,n) \,\&\, n \notin X) \vee (n \in X \,\&\, B_0(k,n))], \Gamma$

$\Rightarrow \Sigma^0_0$-$IA_0 \vdash \exists n (A(n) \,\&\, B(n)), \Gamma$

但し、$A_0, B_0 \in \Sigma^0_0$ でかつ、$A(n) \stackrel{\mathrm{d}}{\equiv} \exists m A_0(m,n)$, $B(n) \stackrel{\mathrm{d}}{\equiv} \exists k B_0(k,n)$.

Lemma 2 の証明。Lemma 1 よりある term t について、

Σ^0_0-$IA_0 \vdash \exists n [(\exists m < t A_0(m,n) \,\&\, n \notin X) \vee (n \in X \,\&\, B(n))], \Gamma$

しかもこの Σ^0_0-IA_0 での proof には $(\exists^2)$ は使われていないと思ってよいから (cf. Thm 0.2)、Σ^0_0 formula に Σ^0_0 formula (abstract) を代入しても Σ^0_0 formula なので、X の proof の $n \in X$ に $\exists m < t A_0(m,n)$ を代入してもなお Σ^0_0-IA_0 での proof であり、$\exists m < t A_0(m,n) \to A(n)$ より、O.K.

Theorem 2.1 の証明。Σ^0_1 formula が Σ^0_1-Sep_0 で証明できる

とする。Thm 0.2, Corr. 0.3 よりその proof を quasi normal に書きかえれば、初めから proof には Σ_1^0 formulae しか occur していないとしてよい。Lemma 2 を使って (Lemma 1 も)、上から順に推論 Σ_1^0-Sep (と Σ_1^0-IA) を消していけるから、その Σ_1^0 formula は Σ_0^0-IA_0 で証明できることがわかる。

Rem. 勿論、Σ_0^0-IA_0 は PRA (L_1 の quantifier-free formulae に関する induction axiom を持った 1^{st} order arithmetic) の conservative extension である。

Lemma 1 の証明。Σ_1^0-formulae に至る、Σ_1^0-IA_0 での quasi normal proof の長さに関する induction。

1) ($\exists^1$) $\dfrac{At, \exists m A, \Gamma}{\exists m A, \Gamma}$ (で終っているとき)。IH より $\exists$ p.r. function f $\quad At, \exists m < f\bar{a} Am, \Gamma \quad g$ を.

$g\bar{a} \triangleq \max(f\bar{a}, t+1)$ とおけば、$\exists m < g\bar{a} Am, \Gamma$ となる.

2) ($b\forall$) $\dfrac{\exists m Am, b \nless t, Bb, \Gamma}{\exists m Am, \forall x < t Bx, \Gamma}$ のとき。IH より $\exists f$ s.t. $\exists m < f\bar{a}b Am, b \nless t, Bb, \Gamma$

($B \in \Sigma_0^0$) $\quad b < t \equiv t\bar{a} \Rightarrow f\bar{a}b \leq g\bar{a} \triangleq \max(f\bar{a}b\,;\, b < t\bar{a})$

より $\exists m < g\bar{a} Am, \forall x < t Bx, \Gamma$.

3) (Σ_1^0-IA)

$\Gamma, \exists m B(m,0), \exists n A \cdots (1) \qquad \Gamma, b \nless t, \neg B(c,b), \exists m B(m,b'), \exists n A \cdots (2)$

$\neg B(c,t), \Gamma, \exists n A \cdots (3)$ として、$\dfrac{(1) \quad (2) \quad (3)}{\Gamma, \exists n An}$ のとき。

IH より $\exists f_0, g_0, h, f_1, f_2$ s.t.

(1′) $\Gamma, \exists m < g_0\bar{a}\, Bm0, \exists n < f_0\bar{a}\, An$

(2′) $\Gamma, b \nless t, \neg Bcb, \exists m < h\bar{a}bc\, Bmb', \exists n < f_1\bar{a}bc\, An$

(3′) $\neg Bct, \Gamma, \exists n < f_2\bar{a}c\, An$.

g を $\begin{cases} g\bar{a}0 = g_0\bar{a} \\ g\bar{a}b' = \max(h\bar{a}bc : c < g\bar{a}b) \end{cases}$ と primitive recursion で定義すれば、(1′), (2′) より、

(1″) $\Gamma, \exists m < g\bar{a}0\, Bm0, \exists n < f_0\bar{a}\, An$

(2″) $\Gamma, b \nless t, \neg\exists m < g\bar{a}b\, Bmb, \exists m < g\bar{a}b'\, Bmb', \exists n < f_3\bar{a}\, An$

但し、$f_3\bar{a} \doteqdot \max(f_1\bar{a}bc : b < t\bar{a}, c < g\bar{a}b)$

よって Σ^0_0-IA より、　$k\bar{a} \doteqdot g\bar{a}(t\bar{a})$ として、

(4) $\Gamma, \exists m < k\bar{a}\, Bmt, \exists n < f_0\bar{a}\, An, \exists n < f_3\bar{a}\, An$

$f\bar{a} \doteqdot \max(f_0\bar{a}, f_3\bar{a}, f_2\bar{a}c : c < k\bar{a})$ として、(3′), (4) より

$\Gamma, \exists n < f\bar{a}\, An$ となる。　　//.

2) Theorem 2.1 の第2証明 (=W. Sieg [1] による証明)

再び WKL_0 を書き直す。言語は L_2、つまり function variables なし。ここでの WKL_0 は、1) での Σ^0_1-Sep_0 に次の推論 WKL を加える:

$$\text{WKL}: \quad \frac{\Gamma, \neg A_0(\bar{a}) \qquad \exists m (\bar{Y}m \notin T_X), \Gamma}{\Gamma}$$

ここに、1) Y と $\bar{a}$ は eigenvariables 2) $\bar{Y}m \doteqdot \langle K_Y(0), \cdots, K_Y(m-1)\rangle$ (K_Y は Y の characteristic function)、つまり、$\bar{Y}m \notin T_X$ ⇔

$\exists c \in {}^{<\omega}2\,(lh(c) = m\ \&\ \forall i < lh(c)\,(c(i) = 0 \leftrightarrow Y(i))\ \&\ c \notin T_X)$

但し、$c \in T_X \overset{d}{\Leftrightarrow} c \in X$，つまり $T_X = X$.

ハ) $\forall \bar{x} \neg A_0(\bar{x})$ $(A_0 \in \Sigma^0_0)$ は、$BT(T_X)\ \&\ \forall x \exists c\,(lh(c) = x\ \&\ c \in T_X)$ の

Π^0_1-form。 $BT(T_X) \overset{d}{\Leftrightarrow} \forall c \forall d\,[(c * d \in T_X \to c \in T_X)\ \&\ (c \in T_X \to c \in {}^{<\omega}2)]$

$(\exists c\,(lh(c) = x \cdots)$ は $\exists c < 2^{x+1}(lh(c) = x \cdots)$ と思ってよい)

Rem. 勿論 Σ^0_1-Sep は Δ^0_1-CA でよい。

このとき、

Lemma 3 $\Gamma \subseteq \Sigma^0_1$ & Y does not occur in Γ として、

Σ^0_1-$IA_0 \vdash \exists m(\bar{Y}m \notin T_X), \Gamma \Rightarrow \Sigma^0_0$-$IA_0 \vdash \exists \bar{x} A_0(\bar{x}), \Gamma$, i.e.,

Σ^0_0-$IA_0 \vdash \neg[BT(T_X)\ \&\ \forall x \exists c\,(lh(c) = x\ \&\ c \in T_X)], \Gamma$

Lemma 3 の証明. Lemma 1 より ある term t について、

Σ^0_0-$IA_0 \vdash \exists m < t\,(\bar{Y}m \notin T_X), \Gamma$. 以下、$\Sigma^0_0$-$IA_0$ 内でのお話し。

$BT(T_X)\ \&\ \forall x \exists c\,(lh(c) = x\ \&\ c \in T_X)$ を仮定して Γ を導く。仮定よりcを、$lh(c) = t\ \&\ c \in T_X$ となるようにとる。$BT(T_X)$ より

$\bar{Y}t \notin T_X$，Γ (，は'又は'と読む) Y は任意だったから $i \in Y$ に formula (abstract) $c(i) = 0$ を代入しても、$c(i) = 0 \in \Sigma^0_0$ より Σ^0_0-IA_0 の proof になり) (わかり易く言うと、Y を $\bar{Y}t = c$ なる Y とってこということ) $c \notin T_X$，Γ

よって Γ を得る。 //.

この Lemma 3 より 1) におけると同様にして Σ^0_1 formula に至る WKL_0 での quasi normal proof から、WKL, Σ^0_1-Sep, Σ^0_1-IA を取り除くことができて、Theorem 2.1 が $WKL_0 \vdash A \Rightarrow \Sigma^0_0$-$IA_0 \vdash A$

~~A~~ , w/ $A \in \Pi^0_2$ の形で証明される。

付記. 1. W. Sieg [11] のもともとの証明では、WKL_0 は function variables $f, g, \cdots \in {}^\omega\omega$ を持った言語で、公理は、$WKL + \Sigma^0_1\text{-}IA + \Sigma^0_1\text{-}AC_0$ となっている。ここに $\Sigma^0_1\text{-}AC_0$ は、

$\Sigma^0_1\text{-}AC_0$: $\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists f \forall x A(x, f(x))$, $A \in \Sigma^0_1$

(添字の 0 は restricted induction であることを示すのではなく、AC の type が 0、つまり、$\omega = \mathbb{N}$ の type ということ)。こうしたとき、Lemma 1 は、$\Gamma \cup \{A\} \subseteq \Sigma^0_1$ について、

$\Sigma^0_1\text{-}IA_0 \vdash \exists n A_n, \Gamma \Rightarrow \exists$ primitive rec. functional F s.t.

$\Sigma^0_0\text{-}IA_0 \vdash \exists n < F(\bar{a}, \bar{f}) A_n, \Gamma$

となる。但し、ここに、$\Sigma^0_i\text{-}IA_0$ $(i = 0, 1)$ には、(lowest type の) primitive rec. functionals が入っているとする。この設定で、Lemma 3 の analogue を示すには、W. Howard による、prim. rec. functional を hereditarily に majorize する prim. rec. functional を使うことになる。しかしながら WKL に関係する関数は $\in {}^\omega 2$ と思ってよく (これを正に、Lemma 3 の analogue の証明で使う)、かつ、$\Sigma^0_1\text{-}AC_0 \leftrightarrow \Delta^0_1\text{-}CA$ over $\Sigma^0_1\text{-}IA_0$ であるから、function variables のない上で与えた WKL_0 を扱えば十分である。なお、prim. rec. functionals of lowest type の入った $\Sigma^0_0\text{-}IA_0$ が入っていない $\Sigma^0_0\text{-}IA_0$ の conservative extension になる

ことを見るには、そのような functional は連続でかつその modulus of continuity が prim. rec. function でとれることに注意されればよい。くわしくは、[14] を参照。

2. W. Sieg は Logic Colloquium 85, Paris の abstract において、次の結果を announce している：$\forall n \geq 1$ について、

$WKL_0 + \Sigma^0_n\text{-}IA$ is Π^1_1-conservative over $\Sigma^0_n\text{-}IA_0$

これは、L. Harrington の結果を含んでおり興味深いが、筆者はその証明を知らない。

次に、function symbols を変えて（減らして）かつ、induction を $\Sigma^0_0\text{-}IA$ に制限したときの WKL_0, $\Sigma^0_1\text{-}Sep_0$ について述べる。

$\mathcal{E}$ を primitive rec. functions からなる集合とする。$L_2(\mathcal{E})$ とは、L_2 (L_1) での function constants を、$\mathcal{E}$ に属するものに制限した言語とする。（正確には、各 $f \in \mathcal{E}$ の定義（p.r. index）ごとに function constant をそれに対応して一つずつ入れる。さらに、その定義に使われた functions に対応する constants も入れる。例えば、掛け算 $\cdot \in \mathcal{E}$ ふつうに定義されていたとして、なら、$+$（足し算）という記号も入れる。）このとき、$\Sigma^0_0(\mathcal{E})\text{-}IA_0$ とは、言語 $L_2(\mathcal{E})$ での理論で、公理は $\mathcal{E}$ に属する関数の defining equations と $L_2(\mathcal{E})$ での bounded formulae $= \Sigma^0_0(\mathcal{E})$ に適用した induction axiom，から成る。$\Sigma^0_1(\mathcal{E})\text{-}Sep_0$ は、$\Sigma^0_0(\mathcal{E})\text{-}IA_0$ に、公理として $\Sigma^0_1(\mathcal{E})\text{-}Sep$ を加えた理論（$\Sigma^0_1(\mathcal{E})$ は $\exists \vec{x} B$, w/ $B \in \Sigma^0_0(\mathcal{E})$ なるもの）。

また、$WKL(\mathcal{E})_0$ とは、$\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA_0$ に公理として、$\Delta^0_1(\mathcal{E})-CA$ と WKL を加えた理論。但し、WKL を書くには、少なくとも 0-1 の有限列に関する lh, $*$, $c(i)$ ($c=\langle c_0, c_1, \cdots, c_n\rangle$, $i\leq n$ のとき $c(i)=c_i$) が $\mathcal{E}$ に入っているか、または、$\Delta^0_0(\mathcal{E})=\Sigma^0_0(\mathcal{E})$ formulae で定義されていて、かつ、それらの簡単な性質が証明できないと話にならないので、$WKL(\mathcal{E})_0$ は、$\mathcal{E}$ に足し算$+$, 掛け算$\cdot$ (と 0, 1) が入っているときにのみ定義する。(0, 1, $+$, $\cdot$ で十分であるのは、Wilkie & Paris [15] にある。) これだけの仮定のもとで、まず、

Proposition. $WKL(\mathcal{E})_0 = \Sigma^0_1(\mathcal{E})-Sep_0$

証明は、[13] にあるものを注意して読めば、$\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA$ で十分であることがわかる。

$\mathcal{E}$ に関して次の仮定をする：

<u>仮定</u>：ある $\mathcal{E}_M \subseteq \mathcal{E}$ があって、次が成立する。

a) $\forall f\in\mathcal{E}\ \exists g\in\mathcal{E}_M\ [\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA_0 \vdash \bar{a}\leq\bar{b} \to f(\bar{a})\leq g(\bar{b})]$

$(\bar{a}=a_0,\cdots,a_{n-1};\ \bar{b}=b_0,\cdots,b_{n-1},\ \ \bar{a}\leq\bar{b} \Leftrightarrow \bigwedge_{i<n} a_i\leq b_i$

b) $\forall g\in\mathcal{E}_M\ [\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA_0 \vdash \bar{a}\leq\bar{b} \to g(\bar{a})\leq g(\bar{b})]$

a) は各 $f\in\mathcal{E}$ について f を majorize する $g\in\mathcal{E}_M$ があるということ。が $\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA_0$

b) は各 $g\in\mathcal{E}_M$ は (weakly) monotonic, non-decreasing ということ。で provable.

正確には、必要なのは次の形。$Tm(\mathcal{E})$ を $L_1(\mathcal{E})$ 上の terms 全体の集合とすると、ある $Tm(\mathcal{E})_M$ があって、

a′) $\forall t\in Tm(\mathcal{E})\ \exists s\in Tm(\mathcal{E})_M\ [\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA_0 \vdash \bar{a}\leq\bar{b} \to t(\bar{a})\leq s(\bar{b})]$.

b') $\forall s \in Tm(\mathcal{E})_M\ [\Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-}IA_0 \vdash \bar{a} \le \bar{b} \to s(\bar{a}) \le s(\bar{b})]$.

各 term $t \equiv t(\bar{a}) \in Tm(\mathcal{E})$ について、ある $f \in \mathcal{E}$ があって、$\Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-}IA_0$ で $t(\bar{a}) = f(\bar{a})$ ということを仮定していないのだから、本当は a'), b') を仮定している。この仮定のもとで、

Theorem 2.2. $\Sigma_1^0(\mathcal{E})\text{-}Sep_0$ is $\Pi_2^0(\mathcal{E})$-conservative over $\Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-}IA_0$

よって、$+, \cdot \in \mathcal{E}$ なら

Theorem 2.3 $WKL(\mathcal{E})_0$ is $\Pi_2^0(\mathcal{E})$-conservative over $\Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-}IA_0$

となる。Theorem 2.2 の証明には Lemma 1 に対応して次で十分。

Lemma 4. $\Gamma \cup \{A_1, \cdots, A_n\} \subseteq \Sigma_1^0(\mathcal{E})$ について、

$\Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-}IA_0 \vdash \Gamma, \exists m A_1, \cdots, \exists m A_n \quad \Rightarrow \Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-}IA_0 \vdash \Gamma, \exists m \le t_1 A_1, \cdots, \exists m \le t_n A_n$

for some terms $t_1, \cdots, t_n$ in $L_1(\mathcal{E})$.

これは Parikh (-type) の定理として知られている。Lemma 4 の証明のアウトラインは次のとうり。簡単のため、$\Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-}IA_0 \vdash \exists m A \ (A \in \Sigma_0^0(\mathcal{E}))$ $\Rightarrow \Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-}IA_0 \vdash \exists m \le t A$ for some term t を示す。$\Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-}IA_0$ を前のように Gentzen 流に書いて cut を取り除いて quasi normal にし(かつ余計な free variables を除いて)みると、$\exists m A$ に至る proof P には $\Sigma_0^0(\mathcal{E})$-formulae か、$\exists m A$ の形の $\Sigma_1^0(\mathcal{E})$-formulae しか occur していないことになる。P に occur する eigenvariables (つまり、$\exists m A$ に occur する variables 以外。$\exists m A$ に occur する free variables を $\bar{a}$ とする) の走る変域は、$g(\bar{a})$, ${}^{\exists} g \in \mathcal{E}_M$ で抑えることができる。それを見るには、P の中で、下のほうに occur する eigenvariable から順に $g \in \mathcal{E}_M$ を決めていけばよ

い。(ここで仮定を使う。) よって P の中で $(\exists^1)$ で $A(t(b,\bar{a}))$ から $\exists m A$ が導かれていたら、$b \leq g(\bar{a}) \to t(b,\bar{a}) \leq h(g(\bar{a}),\bar{a})$ for ${}^{\exists}h \in \mathcal{E}_{M1}$, より $k \in \mathcal{E}_{M1}$ を $k(\bar{a}) = h(g(\bar{a}),\bar{a})$ として、$\exists m \leq k(\bar{a}) A$ となる。この証明は S. Buss [2] による、のでくわしくはそれを参照。

Prop. と Thm 2.2 より Thm 2.3 が出てくる。Lemma 4 から直接、前のように Thm 2.3 を示すこともできる。但し、その際、$exp \in \mathcal{E}$ を仮定していなかったから、$\cancel{\forall x} \exists c\,(lh(c) = x \,\&\, c \in T_x)$ は $\Sigma^0_1(\mathcal{E})$ になってしまう。つまり、P.36 の $\neg A_0 \in \Sigma^0_1(\mathcal{E})$。しかしこれでも Lemma 4 と Lemma 3 の analogue が使えることは明らかだから OK である。

例 1. $\mathcal{E} = \{0, 1, +, \cdot, exp\}$ $(exp(a) = 2^a)$ としたのが $WKL_0^+ = WKL(\mathcal{E})_0$ である。$\Sigma^0_0(\mathcal{E})\text{-}IA_0$ を EFA とも書く。Thm 2.3 より $A \in \Sigma^0_1(\mathcal{E})$ について

$$WKL_0^+ \vdash \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow EFA \vdash \forall x \exists y < 2_n(x) A(x,y) \text{ for some } n$$

$2_0(a) = a$, $2_n(a) = 2^{2_{n-1}(a)}$ となる。

2. $\mathcal{E} = \{0, 1, +, \cdot\}$ のときは、$\Sigma^0_0(\mathcal{E})\text{-}IA_0$ を $I\Delta_0$ と書く。すると、$A \in \Sigma^0_1(\mathcal{E})$,

$$WKL(\mathcal{E})_0 \vdash \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow I\Delta_0 \vdash \forall x \exists y < p(x) A(x,y) \text{ for some}$$

polynominal p, となる。

付記. 上の証明は、Π^0_2 [$\Pi^0_2(\mathcal{E})$] sentence A の WKL_0 [$WKL(\mathcal{E})_0$] での proof P に、$\Sigma^0_0\text{-}IA_0$ [$\Sigma^0_0(\mathcal{E})\text{-}IA_0$] での A の proof P' を対応させている。実際に P から P' をつくっている。しかも、明らかに、その証明は $\Sigma^0_0(Tower)\text{-}IA_0$ $(Tower(n) = 2_n(0))$ で形式化でき、かつ、P' の'長さ' (= Gödel 数, symbols の数, 推論の数 等) は P の'長さ'の Tower であ

さえることができる。従って、この定理は $Tower \in \mathcal{E}$ のときにはバランスがとれていると言える。（Tower が出てくるのは、L_2K での cut-elimination をしているから）しかしながら上の2つの例ではそうではない — 少なくとも上の証明では。つまり、上の定理が EFA や $I\Delta_0$ で証明できるのかという問題。又は、次のような Σ^0_1 $A_0, A_1, \cdots$ があるか？ 各 A_n は、WKL_0 では短かく証明でき、（例えば n の polynomial で長さがおさえられる）しかしながら、Σ^0_1-IA_0 での A_n の証明は、Tower(n) 以上も長くなってしまう。（A_n は Σ^0_1 sentence で true 故、証明はできる）このどちらの問題の解答も筆者には open である。

§4. BI

この§では言語 L_2 に、${}^{\omega}\omega$ を走る function variables $f, g, h, \cdots$ が入っているとする。

Def. $\mathcal{F}$ を L_2 でのある formulae の集合とする。

1. $BI(\mathcal{F})$ とは次のような公理図式：$P \in \mathcal{F}$ と任意の Q について、

$Hyp\,1$ & $Hyp\,2$ & $Hyp\,3 \rightarrow Q\langle\,\rangle$ （$\langle\,\rangle$ は空列）

$Hyp\,1$：$\forall f \exists x\, P(\bar{f}x)$ （$\bar{f}x = \langle f0, \cdots, f(x \dot{-} 1)\rangle$）

$Hyp\,2$：$\forall c \in {}^{<\omega}\omega\, (Pc \rightarrow Qc)$

$Hyp\,3$：$\forall c \in {}^{<\omega}\omega\, [\forall x\, Q(c * \langle x \rangle) \rightarrow Qc]$

2. $TI(\mathcal{F})$, $TI'(\mathcal{F})$ は次の公理図式：$\prec \in \mathcal{F}$ と任意の Q について、

$TI(\mathcal{F})$: $WF(\prec) \to I(\prec, Q)$

$TI'(\mathcal{F})$: $\forall X I(\prec, X) \to I(\prec, Q)$

但し. $WF(\prec) \Leftrightarrow \forall f \exists x (fx' \not\prec fx)$; $I(\prec, Q) \Leftrightarrow Prg[\prec, Q] \to \forall x Qx$

$Prg[\prec, Q] \Leftrightarrow \forall x (\forall y \prec x Qy \to Qx)$

3. $BI \equiv BI(\Sigma^0_0)$, $BI^- \equiv BI(\Sigma^{0,-}_0)$ (Σ^0_0 は L_2 で bndd formulae のクラス,

$TI \equiv TI(\Sigma^0_0)$. $TI^- \equiv TI(\Sigma^{0,-}_0)$ $\Sigma^{0,-}_0$ は. second order parameters

$TI' \equiv TI(\Sigma^0_0)$, $TI'^- \equiv TI'(\Sigma^{0,-}_0)$ なしということ)

4. $\forall E(\Pi^1_0)$ とは次の公理図式:

$\forall E(\Pi^1_0)$: $\forall X A(X) \to A(V)$, $A \in \Pi^1_0$ で V は任意の abstract $\lambda x)(F(x))$.

(つまり. $A(V)$ とは. A の中の $t \in X$ を $F(t)$ でおきかえた formula)

5. $\forall E(\Pi^{1,-}_0)$ とは. 上の $\forall E(\Pi^1_0)$ で. $A(X)$ に occur する set parameter (function parameter も) は X のみとした公理図式, i.e., $\forall X A(X) \in \Pi^{1,-}_1$.

以下でこれらが同値であることを示す。base theory として、Σ^0_0-CA_0 をとる。これは §1 で定義された Σ^0_0-CA_0 に function variables に関する equality axiom と次の Gp (= Graph principle) を加えたもの:

Gp : $\forall x \exists! y ((x, y) \in X) \to \exists f \forall x ((x, fx) \in X)$

Rem. 1. BI_M を. $P \in \Sigma^0_0$ と任意の Q について.

BI_M: $Hyp1 - Hyp3$ & $HypM \to Q\langle\rangle$

$HypM$: $\forall c \in {}^{<\omega}\omega \forall x (Pc \to P(c * \langle x \rangle))$

なる公理図式として、 $BI_M \vdash BI$ (つまり、Σ^0_0-$CA_0 \vdash BI_M \to BI$) となる([7], Theorem 4A)。与えられた $P \in \Sigma^0_0$ と Q について、

$P_1 \in \Sigma^0_0$, Q_1 を、 ($d \subsetneq c \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} \exists d' \neq \langle\rangle (d * d' = c)$)

$P_1 c \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} \exists d \subsetneq c\, Pd$ ($\overset{\wedge}{\Leftrightarrow}$ c *is past secured*)

$Q_1 c \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} P_1 c \vee Qc$ とおくと明らかに P_1, Q_1 は Hyp 1, Hyp 2, Hyp M をみたす。Hyp 3 が OK なら BI_M より $Q_1\langle\rangle$ となり $Q\langle\rangle$ を得る。$\forall x Q_1(c * \langle x\rangle)$ とする。

Case 1. c *is past secured*: $P_1 c \to Q_1 c$. Case 2 c *is immediately secured*, i.e. $Pc \mathbin{\&} \neg P_1 c$: $Pc \to Qc$. Case 3 c *is unsecured*, i.e., $\forall d \le c \neg Pd$: $\forall x \neg P_1(c * \langle x\rangle)$ と仮定より $\forall x Q(c * \langle x\rangle)$。よって Qc。

2. BI_M の結論は $\forall c Qc$ とできる([ ] Remark 4)。与えられた P, Q, c について、i) c *is past secured* なら Hyp M より Pc よって Qc。ii) c *is not past secured* なら、$P_c(d) \doteq P(c * d)$, $Q_c(d) \doteq Q(c * d)$ とおいて BI_M の仮定(Hyp 1)がみたされ $Q_c\langle\rangle$ を得る。BI では結論を $\forall c Qc$ としたものは偽である。

Def. Ng (=Neighborhood) は次の公理のこと:

Ng: $\forall f \forall x \exists c (lh(c) = x \mathbin{\&} f \in c) \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} \forall f \forall x \exists c (c = \bar{f}x)$

$\overset{\wedge}{\Leftrightarrow} \forall f \forall x \exists c \forall i < x = lh(c) (c(i) = f(i))$.

Proposition 1. $Ng + BI \vdash TI$, $Ng + BI^- \vdash TI^-$ ([7], Theorem 5A)

Proof

与えられた $\prec \in \Sigma^0_0 [\in \Sigma^{0-}_0]$ と F について、$WF(\prec)$ と $Prg[\prec, F]$ を仮定する。$\forall x Fx$ を示したい。$P \in \Sigma^0_0 [\in \Sigma^{0-}_0]$ と Q を、

$Pc \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} 2 \le lh(c) \mathbin{\&} \exists n < lh(c) \dot{-} 1 (c(n+1) \not\prec c(n))$

$Qc \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} [c = \langle\rangle \mathbin{\&} \forall x Fx] \vee [c \neq \langle\rangle \mathbin{\&} (Pc \vee \forall y \prec tl(c) Fy)]$ とおく。

但し、$tl(c) \doteq c(lh(c) \dot{-} 1)$。Hyp 1 は Ng より, Hyp 2 は明らかに OK。

Hyp 3. $\forall x\, Q(c * \langle x \rangle)$ とする。 i) $c = \langle\,\rangle$: 仮定と $lh(\langle x \rangle) = x$ より、 $\forall y \prec x\, Fy$. $Prg[\prec, F]$ より Fx. ii) $c = \langle x \rangle$: Qc には $\forall y \prec x\, Fy$ でよい。 $y \prec x$ とする。 $\neg P(\langle x, y \rangle)$ であるから $Q(\langle x, y \rangle)$ より $\forall z \prec y\, Fz$. Prg で OK. iii) $lh(c) \geq 2$: $d \stackrel{\triangle}{=} lt(c)$ とおく。 $\neg Pc$ とする, i.e., $\forall n < lh(c) - 1\ (c(n+1) \prec c(n))$. $\forall y \prec d\, Fy$ を示したいので $y \prec d$ をとる。よって $\neg P(c * \langle y \rangle)$ であり, $Q(c * \langle y \rangle)$ より $\forall z \prec y\, Fz$. 再び Prg で OK. //.

Proposition 2. $TI \vdash BI$, $TI^- \vdash BI^-$ ([7], Theorem 5C)

Proof. 与えられた $P \in \Sigma^0_0\ [\in \Sigma^{0-}_0]$ と Q について Hyp 1−3 とする。

$Rc \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} \exists d \subsetneq c\, Pd$ (c is past secured)

$d \prec c \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} c \subsetneq d\ \&\ \neg Rd$, $\prec \in \Sigma^0_0\ [\in \Sigma^{0-}_0]$ とおく。

i) $\forall f \exists n (f(n+1) \not\prec f(n))$: Case 1. $\forall n (f(n) \subsetneq f(n'))$: Define $g = \cup f(n)$, i.e., $gn \stackrel{\triangle}{=} (f(n+1))(n)$. Hyp 1 より $\exists x\, P(\bar{g}x)$. $n \stackrel{\triangle}{=} x+1$ として $R(\bar{g}n)$. $\bar{g}n \subseteq fn$ より $R(fn)$ ∴ $fn \not\prec f(n-1)$. Case 2. $\exists n \neg(f(n) \subsetneq f(n+1))$: $f(n+1) \not\prec f(n)$.

ii) $Q_1 c \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} \neg Rc \to Qc$ とおく。 $Prg[\prec, Q_1]$ なら、 TI (or TI^-) より、 $\forall c\, Q_1 c$, とくに $Q_1 \langle\,\rangle$. $\langle\,\rangle$ is not past secured より $Q\langle\,\rangle$ となって OK. $\forall d \prec c\, Q_1 d$ と仮定する。さらに $\neg Rc$ として、 Qc を示したい。 $\prec$ の def. より $\forall d \prec c\, Qd$ (*) である。 Case 1. Pc: Hyp 2 より Qc. Case 2. $\neg Pc$: $\forall y\, \neg R(c * \langle y \rangle)$ となり (*) より $\forall y\, Q(c * \langle y \rangle)$. Hyp 3 で OK.

Proposition 3. $TI' \vdash TI$, $TI'^- \vdash TI^-$.

Proof. $\prec \in \Sigma^0_0\ [\in \Sigma^{0-}_0]$ について、 Σ^0_0-CA_0 で、 $WF(\prec) \vdash \forall X\, I(\prec, X)$

を言えばよい。$\forall m(m \notin X \to \exists n \prec m (n \notin X)) \to \exists f \forall m (m \notin X \to fm \prec m \;\&\; m \notin X)$ による。 /.

Proposition 4. $\forall E(\Pi^1_0) \vdash BI$, $\forall E(\Pi^{1,-}_0) \vdash BI^-$

Proof. Prop 3 と同様にして、$P \in \Sigma^0_0$ [$\in \Sigma^{0,-}_0$] と set variable X に適用した BI: Hyp 1−3 $\to X\langle\rangle$ が言え、$\forall E(\Pi^1_0)$ [$\forall E(\Pi^{1,-}_0)$] での $A(X)$ としてこれをとればよい。 /.

Proposition 5. $TI'^- \vdash Ng$ かつ $\forall E(\Pi^{1,-}_0) \vdash Ng$

Proof. $TI'^- \vee \forall E(\Pi^{1,-}_0) \vdash \Pi^1_\infty\text{-}IA$ /.

Proposition 6. $Ng + BI^- \vdash \Pi^1_\infty\text{-}IA$.

Proof. $A0 \;\&\; \forall n(An \to An')$ とする。Aa を示したい。$P \in \Sigma^{0,-}_0$ と Q を、$Pc \Leftrightarrow a \le lh(c)$; $Qc \Leftrightarrow A(a \dot{-} lh(c))$ とおくと Ng より Hyp 1。ほかは明らかだから BI^- より $Q\langle\rangle$, i.e., Aa. /.

Def. 1. formula $A(\vec{f})$ ($\vec{f} = f_0, \dots, f_n$) が $\vec{f}$-normal とは、A の中に $f_i, i \le n$ が occur すれば、それはある variables y, z について $f_i(y) = z$ の形のみのときにいう。

2. quantifier-free (abb. by qf) formula $R(\vec{f})$ の $\vec{f}$-normal form とは、いくつかの new variables $\vec{x}$ について $\exists \vec{x} R_0(\vec{x}, \vec{f})$ の形で、R_0 が qf かつ $\vec{f}$-normal であるもの。$\vec{f}$-normal form $\exists \vec{x} R_0(\vec{x}, \vec{f})$ は $R(\vec{f})$ からある canonical な方法でつくられる、とする。

3. qf formula $R(f)$ と binary abstract $F \equiv \{x, y\} F(x, y)$ について、"R の中の f に F を代入して得られる formula" $R(F)$ とは、$R(f)$ の

f-normal form $\exists\vec{x}R_0(\vec{x},f)$ について、$\exists\vec{x}R_0(\vec{x},F)$ のこと。但し、$R_0(\vec{x},F)$ は、R_0 の中の $f(x)=y$ をすべて $F(x,y)$ でおきかえた formula を表わす。

Proposition 7. $Ng + BI^- \vdash NG$. 但し、NGは任意のFについて、

$NG:\ Fnc(F) \to \forall x \exists c (c = \bar{F}x)$,

$Fnc(F) \overset{\cdot}{\Leftrightarrow} \forall x \exists ! y F(x,y)$; $c = \bar{F}x \overset{\cdot}{\Leftrightarrow} \forall i < x = lh(c) F(i, c(i))$.

Proof. Prop. 6 より OK. //

Proposition 8. 各 &f かつ f-normal な $R(x,f)$ について、次をみたす $P \in \Sigma^0_0$ がとれる:

1) P に occur する free variables は、x, f 以外の R に occur する variables か、又は、a new free variable c。

2) 任意の binary abstract F について、

$NG \vdash Fnc(F) \to [\exists x R(x,F) \leftrightarrow \exists c (F \in c \ \& \ Pc)]$

但し、$F \in c \overset{\cdot}{\Leftrightarrow} c = \bar{F}(lh(c))$.

Proof. R の中の $f(y)=z$, $f(y) \neq z$ の形の formula (R: in negation normal form) をそれぞれ、$c(y)=z \ \& \ y<lh(c)$, $c(y) \neq z \ \& \ y < lh(c)$ でおきかえた formula を P_0c として、$Pc \overset{\cdot}{\Leftrightarrow} \exists x < lh(c) P_0 c$ とする。

$Fnc(F)$ のもとで $\exists x R(x,F) \to \exists c (F \in c \ \& \ Pc)$ に NG を使う。//

Proposition 9. &f かつ f-normal な $R(x,f)$ について、

$Ng + BI \vdash Fnc(F) \ \& \ \forall f \exists x R(x,f) \to \exists x R(x,F)$, F: binary abstract.

又、R に f 以外の 2nd order parameter がなければ、これは $Ng + BI^-$ で OK.

Proof. $Fnc(F)$ & $\forall f \exists x R(x,f)$ とする。Prop. 8 でつくられた P をとる。Hyp 1 は OK。Q を $Qc \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} F \in c \to \exists d(F \in c*d$ & $P(c*d))$ とすると、明らかに、Hyp 2, Hyp 3 もみたされ($F(\mathcal{U}(c),x)$ & $Q(c*\langle x\rangle) \to Qc$)、BI より $Q\langle\rangle$。よって $\exists d(F \in d$ & $Pd)$。Prop. 8 で OK。 %

Proposition 10. 任意の formula $R(x,f)$ と任意の F について、

$N_g + BI \vdash Fnc(F)$ & $\forall f \exists x R(x,f) \to \exists x R(x,F)$.

R に f 以外の 2^{nd} order parameter がなければ $N_g + BI^-$ で OK.

Proof. Prop. 9 と、$\exists x R(x,F)$ の定義による。 %

Proposition 11. formula A について abstract F を、

$F \equiv F(X) \overset{\triangle}{=} \{x,y\}(y \simeq \mu y.\neg A(x,y,X))$ 但し、

$y \simeq \mu y.\neg A \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} \exists y \neg A$ ならば y はそのような最小、しからざれば $y=0$,

という formula とする。任意の abstract V について、

$N_g + BI^- \vdash Fnc(F(V))$ かつ、

$N_g + BI^- \vdash \forall x \exists y \neg A(x,y,V) \to \forall x \forall y[F(V)(x,y) \to \neg A(x,y,V)]$

つまり、$\exists x A(x,F(V)(x),V) \to \exists x \forall y A(x,y,V)$.

Proof. Prop. 6. %

Proposition 12. $N_g + BI \vdash \forall E(\Pi^1_0)$, $N_g + BI^- \vdash \forall E(\Pi^{1,-}_0)$.

Proof. $\forall X A(X) \to A(V)$ を $A \in \Pi^1_0\ [\in \Pi^{1,-}_0]$ と任意の V について示したい。

第一段。A を $\exists$ が先頭にくる prenex normal form に書きかえる。例えば、$A \leftrightarrow \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0$ (A_0: 任意) とする。prenex へのかきか

又には logical なことしか使わないから、任意の V について、

$A(V) \leftrightarrow \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0(V)$ も logical に言える。よって初めから

A は prenex normal form, 例えば上の形としてよい。

第二段 Herbrand する。 A に対し、new function variables f_0, f_1

をとって、A_H を、 $A_H \equiv A_0(x_0, f_0(x_0), x_1, f_1(x_0, x_1))$ とする。

logical に、 $\exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0 \to \forall f_0 \forall f_1 \exists x_0 \exists x_1 A_H$。 abstracts

F_0, F_1 を、 $F_0 \doteqdot \{x_0, y_0\}(y_0 \simeq \mu y_0. \neg \exists x_1 \forall y_1 A_0)$

$F_1 \doteqdot \{x_0, x_1, y_1\}(y_1 \simeq \mu y_1. \exists y_0 (F_0(x_0, y_0) \ \&\ \neg A_0))$

とすれば Prop. 11 より任意の abstract V について、

$Ng + BI^- \vdash Fnc(F_0(V)) \ \&\ Fnc(F_1(V))$

$Ng + BI^- \vdash \exists x_0 \exists x_1 A_0(x_0, F_0(V)(x_0), x_1, F_1(V)(x_0, x_1), V) \to$

$\to \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0(V)$

よって $Ng + BI$ において、 $\forall X A(X) \to \forall X \forall f_0 \forall f_1 \exists x_0 \exists x_1 A_H$,

$\forall X \forall f_0 \forall f_1 \exists x_0 \exists x_1 A_H \to \exists x_0 \exists x_1 A_0(x_0, F_0(V)(x_0), x_1, F_1(V)(x_0, x_1), V)$

(Prop. 10) $\to \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0(V) \equiv A(V)$. //.

Prop. 1−12 と、TI', TI'^- はそれぞれ $\forall E(\Pi^1_0)$, $\forall E(\Pi^{1-}_0)$ に含まれていることにより次を得る。

Theorem 3.1. Σ^0_0-CA_0 上、次の2つの同値な公理図式の系列がある：

a) $Ng + BI \leftrightarrow Ng + TI \leftrightarrow TI' \leftrightarrow \forall E(\Pi^1_0)$

b) $Ng + BI^- \leftrightarrow Ng + TI^- \leftrightarrow TI'^- \leftrightarrow \forall E(\Pi^{1-}_0)$.

Rem. $\forall E(\Pi^1_1) \leftrightarrow \forall E(\Pi^1_0)$ (lightface も) だが、 $\forall E(\Sigma^{1-}_1)$ は強い。っ

まり、$\forall E(\Sigma_1^{1-}) \leftrightarrow \Pi_\infty^1$-CA。$\forall Y \exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow n \in Y)$ を考えればよい。

しかし BI(Π_n^1) は'弱い'，cf. §5。

次に L_2K w/ or w/o ω-rule と induction の同等性について。

Def. RFN とは，L_2K に対する (uniform) Reflection principle を表わす：

RFN：$Pr_{L_2K}(\ulcorner A(X, f, \dot{n})\urcorner) \to A(X, f, n)$

A は L_2 の任意の formula，$\dot{n}$ は自然数 n に対応する numeral $0'^{\cdots'}$ の Gödel 数みたいなもの。i.e.，$\ulcorner A(\dot{n})\urcorner$ は 'formula' $\ulcorner A(a)\urcorner$ の a に numeral $0'^{\cdots'}$ を代入した formula $\ulcorner A(0'^{\cdots'})\urcorner$ の Gödel 数。Pr_{L_2K} は L_2K の canonical な Σ_1^{0-} provability predicate。

Theorem 3.2. Σ_0^0-CA$_0$ ⊢ RFN $\leftrightarrow \Pi_\infty^1$-IA.

Corollary. ACA$_0$ ⊢ RFN$_{ACA_0} \leftrightarrow \Pi_\infty^1$-IA (cf [12], Lemma 2.7)

ここに ACA$_0$ ≒ Π_1^0-CA$_0$，RFN$_{ACA_0}$ は，'ACA$_0$ で証明できれば正しい' に対応する，ACA$_0$ に対する reflection scheme.

Corollary の Proof. ACA$_0$ は finitely axiomatizable だから。

Thm 3.2 の proof. 1) Π_∞^1-IA → RFN は Cut-elimination，Thm 0.2 (Σ_0^0-CA$_0$ で証明できる) と partial truth def. による。2) RFN → Π_∞^1-IA は，$A(0)$ & $\forall x(A(x) \to A(x')) \to A(n)$ の L_2K で proof P_n が，n について prim. rec. につくれるから。 //

次に，ω-rule が入った L_2K と ω-branching tree (well-founded!) についての induction たる BI との同等性。簡単のため，言語 L_2 をかえる。

Def. 1. 1^{st} order language L_1' は、individual constant として 0(zero) のみ，function constant として、$'$ (successor, $+1$) のみを持ち、predicate constants として、すべての prim. rec. relations に対応するものを持つ。とくに、L_1' の closed terms は numerals $0'^{\cdots'}$ のみである。

2. 2^{nd} order language L_2' は、L_1' に、各 n ごとに n-place の predicate variables $X_0^n, X_1^n, \cdots$ を加えて得られる。

3. $X_0 \subseteq \omega\times\omega$ を ω 上の binary relation (predicate variable) とする。このとき、$L_2K^\omega(X_0)$ は次のような公理と推論を持つ。

Rem. $L_2K^\omega(X_0)$ の定義は、X_0 の arity はいくつでもよく、また X_0 一つでなくてもよい, e.g., $L_2K^\omega(X_0, Y)$ 等も同様。

1) $L_2K^\omega(X_0)$ の sequents はすべて、1^{st} order free variable を持たない（2^{nd} order のはあってよい。）

2) 公理。 2.1. L_1' の constants に関する公理。その main formulae はすべて atomic か negated atomic よりなる。ふつうに &f で書いた公理の closed instances。 2.2 $\Gamma, X_0(\bar{n}, \bar{m})$ if $X_0(n, m)$ holds ($\bar{n} \doteq 0'^{\cdots'}$, n個の$'$) 2.3 $\Gamma, \neg X_0(\bar{n}, \bar{m})$ if $X_0(n, m)$ does not hold.

3) 推論は、L_2K のそれに次の変更を加える。

3.1 (b$\forall$), (b$\exists$) を取り除く（つまり bndd quantifiers を primitive な logical operators と思わない） 3.2 ($\forall$) を次の ω-rule におきかえる:

$$(\omega) \quad \frac{\{\Gamma, A(\bar{n})\}_{n\in\omega}}{\Gamma, \forall x A(x)} \quad \text{つまり} \quad \frac{\Gamma, A(0) \quad \Gamma, A(\bar{1}) \quad \cdots \quad \Gamma, A(\bar{n}), \cdots}{\Gamma, \forall x A(x)}$$

3.3 (∃) を次の形に制限する：
$$\frac{\Gamma,\ A(\bar{n})}{\Gamma,\ \exists x A(x)}$$

4. $L_2K^\omega(X_0)$ の preproof とは、ω-branching な labeled tree で、その各 node に $L_2K^\omega(X_0)$ の sequent が label として貼ってあり、かつ、上の $L_2K^\omega(X_0)$ の公理・推論に関して locally correct になっていて、かつ cut degree が finite なもの（各 cut formulae の長さ = degree = logical symbols の数（¬は数えなくてよい）に有限な bound がある）。

5. $L_2K^\omega(X_0)$ の proof とは、preproof で well-founded (naked tree が) なもの。(ω-proof とも言う)

6. preproof をもう少し formal に定義する。$f : {}^{<\omega}\omega \to (\omega\times\omega\times\omega)\cup\{\times\}$ ($\overset{\text{バツ}}{\times} \notin \omega\times\omega\times\omega$) が preproof とは、

6.1 $T_f \triangleq \{c \in {}^{<\omega}\omega : fc \neq \times\}$ として、イ) T_f は tree (non-empty) ロ) $c*\langle n\rangle \in T_f$ & $m<n \Rightarrow c*\langle m\rangle \in T_f$ ハ) $c*\langle n\rangle \in T_f$ & $n \geq 2 \Rightarrow c*\langle m\rangle \in T_f$

6.2. $c\in T_f$ について、fc は $\langle R, \ulcorner\Gamma\urcorner, d\rangle$ の形。6.21 R は公理か推論の名前 6.22 Γ は ($L_2K^\omega(X_0)$ の) sequent 6.23 d は、f_c ($f_c(c') \triangleq f(c*c')$, i.e., node c より上の subproof of f) の中で使われている cut の cut formulae の長さの upperbound 6.24. fc と $\{f(c*\langle n\rangle)\}_{n\in\omega}$ は、公理・推論に関して correct になっている。但し、$(fc)_0$ が公理なら $f(c*\langle n\rangle) = \times$ for $\forall n \in\omega$.

明らかに、preproof は Π^0_1 in X_0. i.e., f is a preproof in $L_2K^\omega(X_2) \Leftrightarrow$

$prepf(f, X_0)$　なる $prepf \in \Pi^0_1$ がある。

7. ω-RFN とは次のような公理図式：sequent Γ に至る $L_2K^\omega(X_0)$ での proof があれば Γ は真。

Theorem 3.3　Σ^0_0-$CA_0 \vdash \omega\text{-RFN} \leftrightarrow TI' \leftrightarrow N_g + BI$, etc.

Proof. 1) ω-RFN $\rightarrow \Pi^1_\infty$-IA より N_g は O.K. TI を示す。binary predicate variable $\prec$ について、$WF(\prec)$ を仮定して、$I(\prec, A) \doteq Prg[\prec, A] \rightarrow \forall x Ax$ を示せばよい。少し省略して書くと、

$$\dfrac{\cdots\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\cdots\ \neg Prg[\prec,A],\ m\prec n\supset Am\ \cdots}}{\neg Prg[\prec,A],\ \forall y\prec n\, Ay} \qquad \overset{\vdots}{\neg An, An}}{\neg Prg[\prec,A],\ \neg(\forall y\prec n\, Ay\supset An),\ An}\ \cdots}{\dfrac{\cdots\ \neg Prg[\prec,A],\ An\ \cdots}{\neg Prg[\prec,A],\ \forall x Ax}}$$

というpreproof of $\neg Prg[\prec,A], \forall x Ax$ をつくると、左上の $\neg Prg[\prec,A],\ m\prec n\supset Am$ でもし $m \not\prec n$ ならこれは真だから stop。しからざれば続けていくと $WF(\prec)$ よりこれは proof になる。より $I(\prec, A)$ に至る proof があるから ω-RFN より $I(\prec, A)$ を得る。

2) Thm 3.2 と同様, i.e., cut-elimination for $L_2K^\omega(X_0)$ と partial truth def. による。くわしくは [6] を参照。　//

Def. theory T について、ω-model-RFN$_T$ とは、任意の formula $A(X)$ について、次を主張する公理図式：

$$A(X) \text{ is true} \Rightarrow \exists \text{countable } \omega\text{-model } M = (M_n)_{n\in\omega} \text{ s.t. } M_0 = X \ \& \ M \models A[X] \ \& \ M \models T.$$

T が L_1' の L_2K での Π_1^0 公理だけから成るとき、単に ω-model-RFN と書く。

Proposition (Henkin-Orey の ω-completeness thm) ACA_0 で:

$A(X_0)$ の ω-proof in $L_2K^\omega(X_0)$ がある ⟺ $A(X_0)$ はすべての countable ω-model M ($X_0 \in M$) で true.

Corollary $ACA_0 \vdash$ ω-RFN ↔ ω-model-RFN よって

$ACA_0 \vdash \omega\text{-model-RFN}_{ACA_0} \leftrightarrow TI'$ (cf. [12] §4)

parameter free の場合のスケッチ。L_2K^ω の preproof は、$L_2K^\omega(X_0)$ の preproof で公理 2.2 $\Gamma, X_0(\vec{n}, \vec{m})$ 2.3 $\Gamma, \neg X_0(\vec{n}, \vec{m})$ in P.52 が使われていないもの。$\omega\text{-RFN}^-$ (for L_2K^ω) とは、各 formula A と、各 $f \in \Sigma_0^{0,-}$ ($\Leftrightarrow f(x)=y \in \Sigma_0^{0,-}$) について、

f が A に至る L_2K^ω の proof なら A は真

という公理図式。また、$\omega\text{-RFN}_{cf}^-$ とは、上の proof f を cut-free (但し、atomic formula についての cut は可) に制限したもの。このとき、

Theorem 3.4 $\Sigma_0^0\text{-}CA_0 \vdash \omega\text{-RFN}_{cf}^- \leftrightarrow TI'^-$

証明は前と同じ。また、[6] より、ある prim. rec. functional ν があって、各 $f \in \Sigma_0^{0,-}$ について、$\Sigma_0^0\text{-}CA_0 + TI'^-$ で、

f が A に至る L_2K^ω の proof ⇒ $\nu(f)$ は f に至る L_2K^ω の cut-free proof

となる。(実際には、ν は、f の code に cut-free な $g = \nu(f)$ の code を対応させる function) ここで少し微妙なのは、f が proof である

こと，すなわち，$WF(f)$ から，$WF(\nu(f))$ を示すところだが，$f \in \Sigma^{0-}_{0}$ と，$TI'^{-} = \forall E(\Pi^{1-}_{0}) \to \Pi^{0-}_{1}\text{-}CA$ より，[6] の議論が work することがわかる。よって

Theorem 3.5 $\Sigma^0_0\text{-}CA_0 \vdash \omega\text{-}RFN^{-} \leftrightarrow TI'^{-}$

付記。Def. formulae の集合 $\mathcal{F}$ について，$\mathcal{F}\text{-}BI$ とは，BI の Q を $Q \in \mathcal{F}$ に制限したものとする。

Proposition. $Ng + \Pi^1_1\text{-}BI \vdash \Sigma^1_1\text{-}GDC$ ([7], Theorem 7B, [12] Theorem 4.1)

Proof. 初めに，Thm 3.1 の proof より $Ng + \Pi^1_1\text{-}BI \vdash \Pi^0_1\text{-}CA$ ($\Pi^1_0\text{-}BI$ で十分)。よって，

$\forall i \forall f \exists g \forall n A(i, \bar{f}n, \bar{g}n) \to \exists h \forall i \forall n A(i, \bar{h}_i(n), \bar{h}_{i+1}(n))$ ］

を，$A \in \Pi^1_0$ について示せば十分。但し，ここに，$h_i(n) = h(\langle i, n\rangle)$ で，pairing function $\langle\ ,\ \rangle$ は，$\langle 0,0\rangle = 0$，イ．$\langle n,n\rangle + 1 = \langle 0, n+1\rangle$

ロ．$\langle i,n\rangle + 1 = \langle i+1, n\rangle$ if $i < n-1$　ニ．$\langle n-1, n\rangle + 1 = \langle n, 0\rangle$

ハ．$\langle i,n\rangle + 1 = \langle i, n+1\rangle$ if $n < i$　なるものとする。明らかに，

$\langle i,n\rangle < \langle i, n+1\rangle$ である。$P \in \Pi^1_0$ を，

$Pc \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} \neg \forall i < lh(c) \forall n \leq \min(lh_1(c_i), lh_1(c_{i+1})) A(i, \bar{c}_i(n), \bar{c}_{i+1}(n))$

但し，$lh_1(c_i) \overset{\triangle}{=} 1 + \max\{n : \langle i, n\rangle < lh(c)\}$，$c_i(n) \overset{\triangle}{=} c(\langle i,n\rangle)$ for $\langle i,n\rangle < lh(c)$．もし，$\exists h \forall x \neg P\bar{h}x$ なら OK だから，$\forall h \exists x P\bar{h}x$ とする。$Q \in \Pi^1_1$ を，$Qc \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} Pc \vee \forall h \in c \neg \forall i < lh(c) \forall n A(i, \bar{h}_i(n), \bar{h}_{i+1}(n))$

とすると，$Hyp\ 3 : \forall x Q(c * \langle x\rangle) \to Qc$ となる。☺ $\forall x Q(c * \langle x\rangle)$ & $\neg Qc$ とする。$l = lh(c) = \langle i, n\rangle$ とおく。1) $i = n$: $h \in c$ を，$\forall i < lh(c) \forall n$

$A(i, \bar{h}_i(n), \bar{h}_{i+1}(n))$ となるようにとる。 $x = h_0(n+1)$ ととれば $\neg Q(c * \langle x \rangle)$.

ロ) $i < n-1$: $x = h_{i+1}(n)$ ハ) $n < i$: $x = h_i(n+1)$ ニ) $i = n-1$: 仮定より g を $\forall n A(i, \bar{h}_i(n), \bar{g}n)$ となるようにとり、$x = g0$ とし、h' を、

$h'_j = h_j$ for $j \le i$, $h'_i = g$ となるようにすれば、この x と h' について、$\neg Q(c * \langle x \rangle)$。 よって Π^1_1-BI より $Q\langle\rangle$。しかし明らかに $\neg Q\langle\rangle$。

§5. ID と iterated Π^1_1-CA.

この§では S. Feferman [4] の結果をまとめる。ID に関する証明論は [1] にくわしい。この§以降、再び言語は function variables なしのもとの L_2 にもどる。order type ε_0+1 の standard な well-ordering on ω をひとつとって fix。ordinals $\alpha, \beta \le \varepsilon_0$ と対応する自然数を同一視する。$\alpha < \beta$ と書いたら、自然数の上のふつうの大小ではなく、この順序での大小を表わすとする。

Def. 1. $L_1(X,Y)$ を、言語 L_1 に a unary predicate variable (constant) X と binary Y を加えて得られる一階の言語とする。$L_1(X,Y)$ での formula $\mathfrak{A}(X,Y; a,b)$ が positive operator form であるとは、1) $\mathfrak{A}$ の中に X は positive にしか occur しない (i.e., $t \notin X$ なし)、2) free variables は高々 a, b のみ、のときに言う。(Y は negative に occur してよい)

2. 一階の言語 L_{ID} は、L_1 に、各 pos. operator form $\mathfrak{A}$ ごとに binary predicate constant $P^{\mathfrak{A}}$ を付加して得られる:

$L_{ID} \doteq L_1 + \{P^{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A}$ is a pos operator form$\}$.

3 一階の理論 ID_α ($\alpha<\varepsilon_0$) は、その言語として L_{ID} をもつ。公理は、L_{ID}での PA (= Peano Arithmetic) の公理（つまり、induction axiom は L_{ID} の任意のformula に適用可）に、各 $P^{\mathfrak{A}}$ ごとに次の2つの公理を加えたもの：

$(P^{\mathfrak{A}}1)_\alpha$ $\quad \forall\beta<\alpha(\mathfrak{A}_\beta(P^{\mathfrak{A}}_\beta)\subseteq P^{\mathfrak{A}}_\beta)$

$(P^{\mathfrak{A}}2)_\alpha$ $\quad \forall\beta<\alpha[\mathfrak{A}_\beta(F)\subseteq F\to P^{\mathfrak{A}}_\beta\subseteq F]$, F は L_{ID} の任意の formula.

但し、$x\in P^{\mathfrak{A}}_\beta :\Leftrightarrow P^{\mathfrak{A}}(\beta,x)$, $x\in\mathfrak{A}_\beta(X) :\Leftrightarrow \mathfrak{A}(X,P^{\mathfrak{A}}_{<\beta},\beta,x)$

$(\gamma,y)\in P^{\mathfrak{A}}_{<\beta} :\Leftrightarrow \gamma<\beta \ \&\ y\in P^{\mathfrak{A}}_\gamma$

一般に、$Cl^{\mathfrak{A}}_{Y,\beta}(X) :\Leftrightarrow \mathfrak{A}(X,Y,\beta)\subseteq X :\Leftrightarrow \forall x(\mathfrak{A}(X,Y,\beta,x)\to x\in X)$ として、

$(P^{\mathfrak{A}}1)_\alpha$ $\quad \forall\beta<\alpha\ Cl^{\mathfrak{A}}_{P^{\mathfrak{A}}_{<\beta},\beta}(P^{\mathfrak{A}}_\beta)$ $\quad (P^{\mathfrak{A}}2)_\alpha\ \forall\beta<\alpha[Cl^{\mathfrak{A}}_{P^{\mathfrak{A}}_{<\beta},\beta}(F)\to P^{\mathfrak{A}}_\beta\subseteq F]$

つまり、$P^{\mathfrak{A}}_\beta=\bigcap\{X : Cl^{\mathfrak{A}}_{P^{\mathfrak{A}}_{<\beta},\beta}(X)\}$ という気持ち。

4. limit $\lambda\le\varepsilon_0$ については、$ID_{<\lambda} :\equiv \bigcup_{\alpha<\lambda} ID_\alpha$

5. 言語 $L_{ID(W)} :\equiv L_1+\{W\}$, W : a binary predicate constant.

理論 $ID_\alpha(W)$ は言語として $L_{ID(W)}$ をもつ。公理は $L_{ID(W)}$ でのPAのそれに、次を加える：

$(W.1)_\alpha$ $\quad \forall\beta<\alpha\ \forall e\in Tr^{<\beta}[\forall c(\{e\}^{W_{<\beta}}(c)\neq 0)\vee\forall x(e\restriction\langle x\rangle\in W_\beta)\to e\in W_\beta]$

$(W.2)_\alpha$ $\quad \forall\beta<\alpha\ \forall e\in Tr^{<\beta}[(\forall c(\{e\}^{W_{<\beta}}(c)\neq 0)\vee\forall x(F(e\restriction\langle x\rangle))\to Fe]\to\forall e\in W_\beta\, Fe$

ここに、F は $ID_\alpha(W)$ の言語 $L_{ID(W)}$ の任意の formula.

$e\in Tr^{<\beta} :\Leftrightarrow$ e is a code of a total rec. function in $W_{<\beta}$ ($:\equiv \Sigma_{\gamma<\beta}W_\gamma$)

s.t. $Tr_e :\equiv \{c\in\omega^{<\omega} : \{e\}^{W_{<\beta}}(c)=0\}$ is a tree.

$e\restriction\langle x\rangle$ は $\{e\restriction\langle x\rangle\}^{W_{<\beta}}(c)\simeq\{e\}^{W_{<\beta}}(\langle x\rangle * c)$ てなる code.

つまり W_β は the set of codes of well-founded and rec. in $W_{<\beta}$ trees.

明らかに $ID_\alpha(W) \subseteq ID_\alpha$

6. $ID_{<\lambda}(W) \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{\alpha<\lambda} ID_\alpha(W)$ λ : limit $\le \varepsilon_0$.

Rem. ID_α に α までの超限帰納法が公理として入っていないのは、$\alpha<\varepsilon_0$ 故証明できてしまうから。一般の $\alpha \geq \varepsilon_0$ については、ID_α は α までの超限帰納法を公理(図式)として入れる。

Def. 理論 S と T と、S, T の言語に共通な formulae の集合 $\mathcal{F}$ について、

1. $S \subseteq_{\mathcal{F}} T \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} S \vdash A \Rightarrow T \vdash A$ for any $A \in \mathcal{F}$

2. $S \equiv_{\mathcal{F}} T \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} S \subseteq_{\mathcal{F}} T \ \& \ T \subseteq_{\mathcal{F}} S$

Lemma. a) 1. $ID_1 \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}(ACA_0+)\Pi^{1-}_1\text{-}CA_0$ 2. $ID_1 \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ RCA_0 + BI^-$

b) $RCA + \Pi^{1-}_1\text{-}CA^* + BI^- \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ ID_1(W)$

但し、$\Pi^{1-}_1\text{-}CA^*$: $\exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow \forall f \exists n R(\bar{f}n))$ つまり Π^{1-}_1-CA を、Π^1_1-normal form なものに制限した公理。

c) $ID_\alpha \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ \Pi^{1-}_1\text{-}CA^\alpha_0$

d) $ID_{\omega^{\alpha+1}} \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ \Pi^1_1\text{-}CA^{<\omega^{\alpha+1}} + BI$

e) $\Pi^1_1\text{-}CA_0^{<\omega^\alpha} \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ ID_{<\omega^\alpha}(W)$ $(0<\alpha\leq\varepsilon_0)$

f) $\Pi^1_1\text{-}CA^\alpha_0 + BI \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ ID_{\alpha\cdot\omega}(W)$ $(0<\alpha<\varepsilon_0)$

よって、

Theorem 4.1. a) $\Pi^1_1\text{-}CA_0^{<\omega^\alpha} \equiv_{\Pi^1_0}\text{-}\ ID_{<\omega^\alpha}$ $(0<\alpha\leq\varepsilon_0)$

b) $\Pi^1_1\text{-}CA^{<\omega^{\alpha+1}} + BI \equiv_{\Pi^1_0}\text{-}\ ID_{\omega^{\alpha+1}}$ $(0\leq\alpha<\varepsilon_0)$

c) $\Pi^1_1\text{-}CA_0^{<\omega^\lambda} \equiv_{\Pi^1_0}\text{-}\ \Pi^1_1\text{-}CA^{<\omega^\lambda} + BI \equiv_{\Pi^1_0}\text{-}\ ID_{<\omega^\lambda}$ (λ : limit $\leq \varepsilon_0$)

とくに、d) $\Pi^1_1\text{-}CA_0 \equiv_{\Pi^1_0}\text{-}\ ID_{<\omega}$ e) $\Pi^1_1\text{-}CA + BI \equiv_{\Pi^1_0}\text{-}\ ID_\omega$

f) Σ^1_2-GDCR $\equiv_{\Pi^1_0}$- $ID_{<\omega^\omega}$ g) Σ^1_2-GDC $\equiv_{\Pi^1_0}$- $ID_{<\varepsilon_0}$.

Rem. λ: limit なら、$ID_{\omega^\lambda} \not\leq_{\Pi^0_1} \Pi^1_1\text{-}CA^{<\omega^\lambda}+BI$, $ID_{\omega^\lambda} \vdash Consis(ID_{<\omega^\lambda})$ より。

Lemma a), b), d) の証明のスケッチ。

a) 各 P^α を、$I^\alpha = \bigcap\{X : \mathcal{A}^\alpha(X)\} : \Pi^{1-}_1$ で解釈する。1. Π^1_1-CA よりこれは set として存在する。2. Thm 3.1 より $RCA_0+BI^- \vdash \forall E(\Pi^{1-}_0)$. これより ($P^\alpha$.2) を解釈したものが OK となる。

d) 各 P^α の解釈 I^α を Δ^1_2 で与える。$F^\alpha_{Y,\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap\{X : \mathcal{A}^\alpha_{Y,\beta}(X)\} : \Pi^1_1$

$C^\alpha(Y,\beta) \Leftrightarrow (Y)_\beta \subseteq F^\alpha_{Y<\beta,\beta}$ & $\mathcal{A}^\alpha_{Y<\beta,\beta}((Y)_\beta)$ とおく。

1) $\forall\beta\forall Y\ \mathcal{A}^\alpha_{Y,\beta}(F^\alpha_{Y,\beta})$ 2) $\exists Y C^\alpha(Y,0)$: $(Y)_0 = F^\alpha_{\phi,0}$ ととる。

3) $\exists Y\ \forall\beta\leq\omega^\alpha\cdot n\ C^\alpha(Y,\beta) \rightarrow \exists Y\ \forall\beta\leq\omega^\alpha\cdot(n+1)\ C^\alpha(Y,\beta)$

∵ $\forall\beta\leq\omega^\alpha\cdot n\ C^\alpha(Y,\beta)$ とする。$\forall\beta\leq\omega^\alpha\cdot(n+1)\ C^\alpha(Z,\beta)$ となる Z は、$(Z)_\beta \stackrel{\text{def}}{=} (Y)_\beta$ for $\beta\leq\omega^\alpha\cdot n$. $\Pi^1_1\text{-}CA^{\omega^\alpha}$ より、$(Z)_{\omega^\alpha+1+\gamma} = F^\alpha_{Z<\omega^\alpha+1+\gamma,\ \omega^\alpha+1+\gamma}$ for $\gamma<\omega^\alpha$

と~~伸~~延ばせる。

4) $\forall n\ \exists Y\ \forall\beta\leq\omega^\alpha\cdot n\ C^\alpha(Y,\beta)$. 5) $\forall\gamma\ \forall Y Z[\forall\beta<\gamma(C^\alpha(Y,\beta) \,\&\, C^\alpha(Z,\beta)) \rightarrow$

$\rightarrow Y_{<\gamma} = Z_{<\gamma}]$: by t.i. on $\gamma<\varepsilon_0$.

6) $x\in I^\alpha_\gamma \Leftrightarrow \exists Y[\forall\beta\leq\gamma\ C^\alpha(Y,\beta) \,\&\, x\in(Y)_\gamma]$

$\Leftrightarrow \forall Y[\forall\beta\leq\gamma\ C^\alpha(Y,\beta) \rightarrow x\in(Y)_\gamma]$: Δ^1_2

7) $\forall\gamma<\omega^{\alpha+1}\ \mathcal{A}^\alpha_{I^\alpha_{<\gamma},\gamma}(I^\alpha_\gamma)$: 4)-6) より (ここまでは $\Pi^1_1\text{-}CA^{\omega^\alpha}$ しか使ってない)

8) $\forall\gamma<\omega^{\alpha+1}(\mathcal{A}^\alpha_{I^\alpha_{<\gamma},\gamma}(B) \rightarrow I^\alpha_\gamma \subseteq B)$ for any B ∵ 4) より $\exists Y$ s.t.

$\forall\beta\leq\gamma\ C^\alpha(Y,\beta)$. とくに、$(Y)_\gamma \subseteq F^\alpha_{Y<\gamma,\gamma}$. Thm 3.1 より $\forall E(\Pi^1_0)$ より、

$\mathcal{A}^\alpha_{Y<\gamma,\gamma}(B) \rightarrow (Y)_\gamma \subseteq B$. 6) より $Y_{<\gamma+1} = I^\alpha_{<\gamma+1}$. ⁄.

b) $M \overset{\circ}{=} Rc'(W)$ として、QX $(Q = \forall, \exists)$ を $Qx \in Rc'(W)$ で、$n \in X$ を $n \in' x \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \{x\}^W(n) \simeq 0$ でおきかえた formula A^M を、各 A in L_2 についてつくって、$RCA + \Pi^1_1\text{-}CA^* + BI^- \vdash A \Rightarrow ID_1(W) \vdash A^M$ を示す。

イ) $ID_1(W) \vdash (\Pi^1_1\text{-}CA^*)^M \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \exists y \in M \, \forall n \, (n \in' y \leftrightarrow \forall f^M \exists x \, P(\bar{f}x, n))$

($\forall f^M$ は $\forall f \in' M$) $P(\bar{f}x, n)$ を $P_n(\bar{f}x)$ と書く。これは、monotonic として よい: $P_n c \,\&\, c \subseteq d \to P_n d$。ある prim. rec. g_P について、$g_P(n) \in W \leftrightarrow \forall f^M \exists x \, P_n \bar{f}x$ を示せば十分。$e_{P_n} \overset{\circ}{=} g_P(n)$ を、

$c \in' e_{P_n} \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \neg P_n c$。monotonicity より e_{P_n} codes a tree $Tr_{e_{P_n}}$

$c \in Tr_{e_{P_n}} \overset{\circ}{\Leftrightarrow} c \in' e_{P_n} \Leftrightarrow c$ is unsecured。このとき、

$e_{P_n} \in W \leftrightarrow \forall f^M \exists x \, P_n \bar{f}x$ ∵ n は略。$c \in Sec_P$ (c is securable) $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $e_P \restriction c \in W$ とおく。a) $Pc \vee \forall x (c * \langle x \rangle \in Sec_P) \to c \in Sec_P$ は明らか。

b) $\forall c \, [Pc \vee \forall x (c * \langle x \rangle \in Q) \to Qc] \to Sec_P \subseteq Q$ for any Q:

$e \in Tr = Tr^\phi$ について。$F_c e \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \forall d \, [Tr_e = Tr_{e_P \restriction c * d} \to c * d \in Q]$ とおくと、

$W \subseteq F_c$ となる。例えば、$Tr_e = \phi \to F_c e$ には、$Tr_{e_P \restriction c * d} = \phi \Rightarrow P(c * d)$

$\Rightarrow Q(c * d)$ となる。よって $c \in Sec_P \to e_P \restriction c \in W \to F_c(e_P \restriction c) \to c \in Q$。

c) $c \in Sec_P \to \forall f^M \exists x P(c * \bar{f}x)$: b) より。とくに、$\langle\,\rangle \in Sec_P \to \forall f^M \exists x P \bar{f}x$。

d) $\forall f^M \exists x P \bar{f}x \to \langle\,\rangle \in Sec_P$, i.e., $e_P \in W$: $\langle\,\rangle \notin Sec_P$ とする。

$h \in M = Rc(W)$ を $hc \simeq \mu x. (c \notin Sec_P \to c * \langle x \rangle \notin Sec_P)$。$h$ より $f \in M$ を a) によりつくって $\forall x \neg P \bar{f}x$ となる。

ロ) $ID_1(W) \vdash (BI^-_M)^M$: $\forall f^M \exists x P \bar{f}x \,\&\, \forall c \forall d (Pc \to P(c * d)) \,\&\, \forall c (Pc \to Qc) \,\&\, \forall d (\forall x \, Q(c * \langle x \rangle) \to Qc) \to Q\langle\,\rangle$: b), d) より //.

Rem 1. Lemmaの証明より、少なくとも、$\Pi^1_n\text{-}CA+BI \subseteq_{\Sigma^1_1}\text{-}\ \Pi^{1-}_n\text{-}CA^{\omega}_0$ (in $ACA_0+\Pi^{1-}_n\text{-}CA^{\omega}$) となる, $n \geq 1$。($M \doteq \bigcup_{i \in \omega} Rec((Y)_i)$ w/ $Hier^{n}_{\omega}(\phi, Y)$)。 明らかに、$BI(\Pi^1_n) \cup BI(\Sigma^1_n) \subseteq \Pi^1_n\text{-}CA+BI$。

2. $\Sigma^1_1\text{-}AC_0+\Pi^{1-}_1\text{-}CA \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ ID_1(W)$ ⊙ 1) §2 の A. Cantini の証明より、$\Sigma^1_1\text{-}AC_0+\Pi^{1-}_1\text{-}CA \subseteq_{\Sigma^1_1}\text{-}\ \Pi^{0-}_1\text{-}CA^{<\omega}_0(W)+\Pi^{1-}_1\text{-}CA^{*}(W)$ (sets は、各nについて、Wのn-th jumpに rec. in なもつに限る)。明らかに、これは $ID_1(W)$ で modeling できる。

3. $ID_1 \nsubseteq_{\Pi^1_1}\text{-}\ ACA+\Pi^{1-}_1\text{-}CA$: $ACA+\Pi^{1-}_1\text{-}CA \vdash$ Howard ordinal までの超限帰納法。より $ACA+\Pi^{1-}_1\text{-}CA \vdash Consis(ID_1)$

4 $BI = BI+\Sigma^{1}_1\text{-}GDC \vdash A$, $A \in \Pi^{1-}_0$ なら $\exists \alpha <$ Howard ordinal s.t. $PA+$ "αまでの超限帰納法" $\vdash A$ より $ID_1 \vdash A$。つまり、

$BI = BI+\Sigma^1_1\text{-}GDC \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ ID_1$

5. $ID_2 \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ BI+\Pi^{1-}_1\text{-}CA$: まず ID_1 の P^{α}_0 を $\Pi^{1-}_1\text{-}CA$ で set としてつくって、ID_2 の P^{α}_1 は BI による。

6. $BI+\Pi^{1-}_1\text{-}CA \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ ID_2$: 4. と同様、証明論による。*)

付記、$\widehat{ID}_1$ を、最小の fixed point P^{α} (ID_1) がある、ではなく、単なる fixed point P^{α}, i.e., $P^{\alpha}=\alpha(P^{\alpha})$ for pos. $\alpha(X^{+}, n)$, がある という理論 とすると、$\widehat{ID}_1 \equiv_{\Pi^1_0}\text{-}\ \Sigma^1_1\text{-}AC$ が知られている。[5]。しかし、[5] での $\Sigma^1_1\text{-}AC \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ \widehat{ID}_1$ の証明はかなり間接的である。直接、$\Pi^0_1\text{-}CA^{<\varepsilon_0}_0 \subseteq_{\Pi^1_0}\text{-}\ \widehat{ID}_1$ は示せないか?

*) 先に $\Pi^{1-}_1\text{-}CA$ の cut をとる。o.d. で言えば $\Pi^{1-}_1\text{-}CA$ を C_0 で BI を C_1 で。

§6. iterated Π^0_1-CA の順序数。

Def. 1. $\Omega \doteqdot \omega_1$ = the 1st uncountable ordinal として. $\varphi : \Omega \to \Omega$ が normal とは strictly increasing ($\alpha < \beta < \Omega \Rightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$) でかつ continuous ($\varphi(\lambda) = \sup_{\alpha<\lambda} \varphi(\alpha)$ for limit $\lambda < \Omega$) なこと。

2. normal $\varphi : \Omega \to \Omega$ の derivative $\varphi' : \Omega \to \Omega$ は次で定義される normal function : $\varphi'(\alpha)$ = the α-th fixed point of φ.

3 Veblen hierarchy $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ は、次のようにしてつくられる normal functions のうち: 3.1 $\varphi_0(\alpha) = 2^\alpha$ 3.2 $\varphi_{\alpha+1} = (\varphi_\alpha)'$

3.3 λ: limit $\Rightarrow rg\varphi_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} rg\varphi_\alpha$ ($rg\varphi$ = the range of $\varphi = \varphi''\Omega$)

つまり. $\varphi_\lambda(\beta)$ = the β-th common fixed point of φ_α's w/ $\alpha < \lambda$.

Proposition 1. $\varphi_{\alpha+1}(0) = \sup_{n<\omega} \varphi^n_\alpha(0)$, 但し. $\varphi : \Omega \to \Omega$ について. φ^n は φ の n-th iterate. $\varphi^0(\alpha) = \alpha$; $\varphi^{n+1}(\alpha) = \varphi(\varphi^n(\alpha))$

2 $\varphi_{\alpha+1}(\beta+1) = \sup_{n<\omega} \varphi^n_\alpha(\varphi_{\alpha+1}(\beta)+1)$

3. limit λ について. $\varphi_\lambda(0) = \sup_{\alpha<\lambda} \varphi_\alpha(0)$

$\varphi_\lambda(\beta+1) = \sup_{\alpha<\lambda} \varphi_\alpha(\varphi_\lambda(\beta)+1)$

4. $\varphi_\alpha(\beta) = \sup_{\gamma<\beta} \varphi_\alpha(\gamma)$ for limit $\beta < \Omega$.

5. $\psi = \lambda\alpha.\varphi_\alpha(0) : \Omega \to \Omega$ は normal.

Def. 順序数 $\Gamma_0 \doteqdot$ the least α ($\alpha = \varphi_\alpha(0)$) $= \psi'(0)$

= the least $\alpha > 0$ ($\forall \beta, \gamma < \alpha$ ($\varphi_\beta(\gamma) < \alpha$)).

以下. order type Γ_0 の prim. rec. well-ordering on ω で standard なものをひとつとって fix (cf. [9])。

Theorem 5.1 1) $\Pi^0_1\text{-CA}_0^{<\omega^a}$ is Π^1_1-conservative over $ACA_0 + I(<\varphi_a(0))$ $(a \le \Gamma_0)$

2) $\Pi^0_1\text{-CA}^{<\omega^{a+1}}$ is Π^1_1-conservative over $ACA_0 + I(<\varphi_{a+1}(\varepsilon_0))$ $(a < \Gamma_0)$

但し. $I(<a) :\equiv \bigcup_{\alpha<a} I(\alpha)$; $I(\alpha) :\Leftrightarrow \forall X\, I(X,\alpha)$

$I(X,\alpha) :\Leftrightarrow Prg[<,X] \to \forall x<\alpha\,(x\in X)$ ($<$ は Γ_0-ordering).

Lemma 1. 1) $\nu=\omega^a>1$ について. $\Pi^0_1\text{-CA}_0^{<\nu} \vdash I(<\varphi a0)$ つまり

$\Pi^0_1\text{-CA}_0^{<\nu} \vdash I(\alpha)$ for each $\alpha<\varphi a0 \equiv \varphi_a(0)$.

2) $\nu=\omega^{a+1}$ について. $\Pi^0_1\text{-CA}^{<\nu} \vdash I(<\varphi_{a+1}(\varepsilon_0))$.

しばらく Lemma 1の証明が続く。当分の間 $\Pi^0_1\text{-CA}_0^{<\nu}$ の中での証明。

U を a fixed set parameter とする。$\beta<\nu$ について.

$I^{<\beta}(\gamma) :\Leftrightarrow \forall X\in \bigcup_{\delta<\beta} Rc(H^U_\delta)\, I(X,\gamma)$ (H^U_δ は U の δ-th jump).

各 $\alpha<\nu$ について. $A_\alpha(a) :\Leftrightarrow 0<a \to \forall\beta\,\forall\delta>0\,[\,I^{<\omega^a(\delta+1)}(\beta)$ &

& $\omega^a(\delta+1)\le\alpha \to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta)\,]$

とおく。このとき.

Proposition 1. 各 $\alpha<\nu$ について. $\Pi^0_1\text{-CA}_0^{<\nu} \vdash Prg[A_\alpha]$

但し. $Prg[A_\alpha] :\Leftrightarrow Prg[<, A_\alpha]$ ($<$: Γ_0-ordering)

Proposition 2. $\Pi^0_1\text{-CA}_0^{<\nu} \vdash I(<\nu)$

Lemma 1 の証明。 1) Prop. 1, 2 より $\Pi^0_1\text{-CA}_0^{<\nu} \vdash \forall a<\alpha\, A_\alpha(a)$ for each $\alpha<\nu$. イ) $\nu=\omega^\lambda$, λ: limit のとき: 各 a w/ $0<a<\lambda$ について.

$I(\varphi a0)$ を示せばよい。 $\alpha=\omega^a\cdot 2$ として. $A_\alpha(a)$ より $\beta=0$, $\delta=1$ とし

て、$I^{<\omega^a}(\varphi a 0)$。とくに、$I(\varphi a 0)$. ロ) $\nu = \omega^{b+1}$ のとき：$b>0$ とおく.
各 $n<\omega$ について、$I(\varphi_b^n(0))$ で十分。$\alpha = \omega^b\cdot(n+1) < \omega^{b+1}$ として、$A_\alpha(b)$
より $\forall\beta\forall m\,[I^{<\omega^b(m+1)}(\beta)\ \&\ 0<m\le n \to I^{<\omega^b m}(\varphi b\beta)]$

$\beta = 0,\ \varphi_b(0),\ \varphi_b^2(0),\ \dots,\ \varphi_b^{n-1}(0)$ ととっていって、$I^{<\omega^b}(\varphi_b^n(0))$.
$m = n,\ n-1,\ n-2,\ \dots,\ 1$ とくに、$I(\varphi_b^n(0))$.

2) $a=0$ のときは、$\Pi^0_1\text{-}CA^{<\omega} = ACA \vdash I(<\varphi_1(\varepsilon_0))$ ($\varphi_1(\varepsilon_0)=\varepsilon_{\varepsilon_0}$) は
だれでも知ってる。$a>0$ とおく。$A_{\omega^a\cdot n}(a)$ for each $n>0$ より、
$A_{\omega^a\cdot 2}(a)$, i.e., $\forall\beta[I^{<\omega^a\cdot 2}(\beta)\to I^{<\omega^a}(\varphi a\beta)]$。よって
$\forall\beta[I(\beta)\to I(\varphi a\beta)]$. Π^1_∞-IA で、$\forall n\forall\beta[I(\beta)\to I(\varphi^n_a(\beta))]$ …(1).
$B(\beta) :\Leftrightarrow I(\varphi_{a+1}(\beta))$ として、$Prg[B]$ となる。∵ i) $B(0)$: $B(0) \Leftrightarrow$
$I(\varphi_{a+1}(0)) \Leftrightarrow \forall n<\omega\, I(\varphi^n_a(0))$。(1) で $\beta=0$. ii) $B(\beta)\to B(\beta+1)$:
つまり $I(\varphi_{a+1}(\beta)) \to I(\varphi_{a+1}(\beta+1)) \Leftrightarrow \forall n<\omega\, I(\varphi_a^n(\varphi_{a+1}(\beta)+1))$
(1) と Π^1_∞-IA で OK. iii) λ: limit & $\forall\beta<\lambda\, B(\beta)\to B(\lambda)$: 明らか。
よって、Π^1_∞-IA より $I(B, <\varepsilon_0)$。∴ $I(<\varphi_{a+1}(\varepsilon_0))$. //

Prop. 1 の証明。$\alpha<\nu$ を fix。$\forall b<a\, A_\alpha(b)$ を仮定して $A_\alpha(a)$ を示す。
($a=1$ のとき) $\forall\beta\forall\delta>0\,[I^{<\omega\delta+\omega}(\beta)\ \&\ \omega\delta+\omega\le\alpha \to I^{<\omega\delta}(\varphi 1\beta)]$
を示す。$\delta>0$, $\omega\delta+\omega\le\alpha$ とおく。$B(\beta) :\Leftrightarrow I^{<\omega\delta}(\varphi_1(\beta))$ として、
$B\in Rc(H^\nu_{\omega\delta+k})$ for some $k<\omega$ より $Prg[B]$ を示せばよい。$B(\beta)\to$
$B(\beta+1)$ には、$\omega\delta$: limit より、$I^{<\omega\delta}(\gamma)\to I^{<\omega\delta}(2^\gamma)$ で十分。
($a=b+1>0$ のとき) $A_\alpha(b)$, $\delta>0$, $I^{<\omega^a(\delta+1)}(\beta)$, $\omega^a(\delta+1)\le\alpha$ として
$I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta)$ を言えばよい。$B(\beta) :\Leftrightarrow I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta) \in Rc(H^\nu_{\omega^a\delta+\omega})$ として.

$Prg[B]$ を言えばよい。 1) $B(0)$ 2) $B(\beta)\to B(\beta+1)$ 3) λ: limit & $\forall\beta<\lambda\, B(\beta)\to B(\lambda)$ 1) は 2) と同様。 3) は明らか。 2) $B(\beta)$, i.e., $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta)$ とする。 $\varphi a(\beta+1)=\sup_{n<\omega}\varphi_b^n(\varphi a(\beta)+1)$.

2.1 $\delta=\delta_0+1$ のとき: $\forall m,n<\omega$ について, $\omega^b(\omega\delta_0+m+n)<\omega^b(\omega\delta_0+\omega)=\omega^a\delta$ に注意して. $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta)\to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta+1)\to$

$\to I^{<\omega^b(\omega\delta_0+m+n)}(\varphi a(\beta)+1)$ for $\forall m,n<\omega\to I^{<\omega^b(\omega\delta_0+m)}(\varphi_b^n(\varphi a(\beta)+1))$ for $\forall m,n<\omega$ ($A_d(b)$ と ind on $n<\omega$) $\to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a(\beta+1))$

($\omega^a\delta=\sup_{m<\omega}\omega^b(\omega\delta_0+m)$)

2.2 δ: limit のとき: $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta)\to I^{<\omega^b(\omega\gamma+n)}(\varphi a(\beta)+1)$ for $\forall n<\omega$, $0<\forall\gamma<\delta\to I^{<\omega^a\gamma}(\varphi_b^n(\varphi a(\beta)+1))$ for $\forall n<\omega$, $0<\forall\gamma<\delta$ ($A_d(b)$ と ind on $n<\omega$) $\to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a(\beta+1))$

($\omega^a\delta=\sup_{\gamma<\delta}\omega^a\gamma$)

(a: limit のとき) $\forall b<a\, A_d(b)$, $I^{<\omega^a(\delta+1)}(\beta)$, $\delta>0$, $\omega^a(\delta+1)\le d$ を仮定する。 $B(\beta)\overset{\circ}{\Leftrightarrow}I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta)$ とおいて $Prg[B]$で十分。

2) $B(\beta)\to B(\beta+1)$: $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta)\to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a(\beta+1))$

$\varphi a(\beta+1)=\sup_{b<a}\varphi b(\varphi a(\beta)+1)$.

2.1 $\delta=\delta_0+1$ のとき: $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta)\to I^{<\omega^a\delta_0+\omega^a}(\varphi a(\beta)+1)\to$

$\to I^{<\omega^a\delta_0+\omega^c+\omega^b}(\varphi a(\beta)+1)$ for $0<\forall b\le\forall c<a\to$ ($A_d(b)$ より)

$\to I^{<\omega^a\delta_0+\omega^c}(\varphi b(\varphi a(\beta)+1))$ for $0<\forall b\le\forall c<a\to$

$\to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a(\beta+1))$ ($\omega^a\delta=\omega^a\delta_0+\sup_{b\le c<a}\omega^c$)

2.2 δ: limit のとき: $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta)\to I^{<\omega^a\gamma+\omega^b}(\varphi a(\beta)+1)$ for

$0<{}^\forall\gamma<\delta,\ 0<{}^\forall b<a \to I^{<\omega^a\gamma}(\varphi_b(\varphi_a(\beta)+1))(A_\delta(b)) \to$

$\to I^{<\omega^a\delta}(\varphi_a(\beta+1))$。 //

Prop. 2 の証明。$\alpha<\nu$ について、ordinals $\leq\alpha$ の有限集合 $S(\alpha)$ を、
0) $\alpha\in S(\alpha)$ 1) $\beta=\beta_1+\cdots+\beta_n,\ \beta_1>\cdots>\beta_n,\ \beta_1,\cdots,\beta_n\in rg\,\varphi_0$ として、$\beta\in S(\alpha)\Rightarrow\beta_1,\cdots,\beta_n\in S(\alpha)$ 2) $\varphi\gamma\delta\in S(\alpha)\ \&\ \gamma,\delta<\varphi\gamma\delta$ $\Rightarrow\gamma,\delta\in S(\alpha)$. と帰納的に定義する。$\forall\beta\in S(\alpha)\ \Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\nu}\vdash I(\beta)$ で十分。以下、$\Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\nu}$ での証。$I(\gamma)\ \&\ I(\delta)\to I(\varphi\gamma\delta)$, $\varphi\gamma\delta\in S(\alpha)$ を示せばよい。$\gamma=0$ なら、$\varphi\gamma\delta=2^\delta$ より明らか。$\gamma>0$ とおく。
$\omega^\gamma\cdot 2<\omega^{\varphi\gamma\delta}\cdot 2=\varphi\gamma\delta\cdot 2\leq\alpha\cdot 2<\nu$. Prop. 1 より $Prg[A_{\alpha\cdot 2}]$.
$I(\gamma)$ より $A_{\alpha\cdot 2}(\gamma)$, とくに $\forall\beta[I^{<\omega^\gamma\cdot 2}(\beta)\to I^{<\omega^\gamma}(\varphi\gamma\beta)]$
$I(\delta)$ より $I^{<\omega^\gamma\cdot 2}(\delta)$。よって $I^{<\omega^\gamma}(\varphi\gamma\delta)$ ∴ $I(\varphi\gamma\delta)$ //

次に conservative のほうの証明。初めに各 $\alpha<\Gamma_0$ について、1階の理論 $(H^X)_\alpha$ (X: a set parameter) を定義する。$(H^X)_\alpha$ の言語 $\equiv L_1+\{H^X, X, \in\}$. atomic formulae は L_1 のそれと、term t について $t\in X$, $t\in H^X$ の形のもの。 $t\in H^X_s \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \langle s,t\rangle\in H^X$ ($\langle\ ,\ \rangle$: pairing function)
$(H^X)_\alpha$ の公理は、PA の公理 (induction axiom に H^X, X が occur してよい) と次の公理: $H^X_0=X\ \&\ \forall\beta\leq\alpha[(Suc(\beta)\to H^X_\beta\simeq(H^X_{pd(\beta)})')\ \&$
$\&\ (Lim(\beta)\to H^X_\beta=\Sigma_{\gamma<\beta}H^X_\gamma)]$ (つまり、ほぼ $(H^X)_\alpha=\Pi^0_1\text{-}CA^\alpha_0$)
明らかに、$A(X)$ を Π^1_0-formula で、その set parameter は X のみ、とすると、1) $\Pi^0_1\text{-}CA^\alpha_0\vdash A(X)\Rightarrow(H^X)_{\alpha\cdot n}\vdash A(X)$ for ${}^\exists n<\omega$
2) $\Pi^0_1\text{-}CA^\alpha\vdash A(X)\Rightarrow(H^X)_{\alpha\cdot\omega}\vdash A(X)$.

Def. normal functions $\{\theta_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ を. 0) $\theta_0(\beta)=\beta$ 1) $\theta_1(\beta)=2^\beta$

2) $\theta_{\alpha+1}(\beta)=\theta_\alpha(\theta_1(\beta))$, i.e., $\theta_{\alpha+1}=\theta_\alpha\circ\theta_1$.

3) $rg\,\theta_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda} rg\,\theta_\alpha$, λ: limit と定義する。

Proposition 1. $\theta_{\alpha+\beta}=\theta_\alpha\circ\theta_\beta$ for $\alpha,\beta<\Omega$.

2. $\theta_{\omega\alpha}=\varphi_\alpha$, $\alpha<\Omega$

Lemma 2. $A(X)$ を. set parameter は X しか occur しない Π^0_∞-formulaとして. $(H^X)_\alpha\vdash A(X)\Rightarrow ACA_0+I(<\theta_\alpha(\varepsilon_0))\vdash A(X)$

($A(X)$ には H^X なし).

この Lemma と上の注意より. Thm 5.1 が従う。以下. Lemma 2 の証明。
$(H^X)_\alpha$ を semi-formal system $\underbrace{}_{(H^X)^*_\alpha}$ にうめ込む。 Ctm ≡ the set of closed terms in L_1 とする. $(H^X)^*_\alpha$ の formulae をつくる.

1) $s,t\in Ctm\Rightarrow s=t$, $s\neq t$, $t\in H^X_n$, $t\notin H^X_n$ $(n<\omega)$ は atomic formulae (つまり. H^X_n は. 各 $n<\omega$ について unary predicate と思う)

2) Φ が formulae の countable set $\Rightarrow \bigwedge\Phi$, $\bigvee\Phi$ も formulae。

$\Phi=\{A_0,A_1,\cdots\}$ のとき. $\bigwedge\Phi$, $\bigvee\Phi$ はそれぞれ $\bigwedge_n A_n$, $\bigvee_n A_n$ と書く。

Def. atomic formulae A, B が numeq. (= numequivalent) とは. B の中のいくつかの (closed) terms をそれと同じ値をもつ terms でおきかえて A が得られるときに言う。

Def. $(H^X)^*_\alpha$ の derivations. Γ は formulae の有限集合。

(Ax) 1. $\Gamma, s=t$ if $\mathbb{N}\models s=t$ 2. $\Gamma, s\neq t$ if $\mathbb{N}\not\models s=t$

3. $\Gamma, A, \neg B$ A と B は numeq. な atomic formulae.

$(\wedge)\ \dfrac{\cdots\ \Gamma, A_n\ \cdots}{\Gamma, \bigwedge_n A_n}$ for $\forall n<\omega$ $\quad(\vee)\ \dfrac{\Gamma, A_n}{\Gamma, \bigvee_n A_n}$ for $\exists n<\omega$

(cut) $\dfrac{\Gamma, A \quad \neg A, \Delta}{\Gamma, \Delta}$ 各 limit $\lambda \leq \alpha$ について.

$(H^X_\lambda)\ \dfrac{\Gamma,\ n\in H^X_\beta}{\Gamma,\ m\in H^X_\lambda}$ $\quad(\neg H^X_\lambda)\ \dfrac{\Gamma,\ n\notin H^X_\beta}{\Gamma,\ m\notin H^X_\lambda}$ ここに, $\beta<\lambda$ で. $m=\langle\beta, n\rangle$.

(Ax') 各 n s.t. $n\not\leq\alpha$ について. $\Gamma,\ t\notin H^X_n$.

$\beta+1\leq\alpha$ なる β についての $(H^X_{\beta+1})$ と $(\neg H^X_{\beta+1})$ を書くための準備。

$H^X_{\beta+1}$ は H^X_β の jump だから. $n\in H^X_{\beta+1} \Leftrightarrow \exists y\, T(n, n, \overline{H^X_\beta}(y), y)$

$\Leftrightarrow \exists y \exists z$ ['z は長さ y の 0-1 列' & $T(n,n,z,y) \wedge \forall i<y\,((z)_i \cong$ $z(i)=0 \leftrightarrow i\in H^X_\beta)$]. 従って p.r. function f を.

$f(n,k,m)=0 \Leftrightarrow$ 'k は長さ m の 0-1 列' & $T(n,n,k,m)$ と

とると. $n\in H^X_{\beta+1} \Leftrightarrow \bigvee_{m,k}[f(n,k,m)=0\ \&\ \bigwedge_{i<m}[(k(i)=0\ \&\ i\in H^X_\beta)$ $\vee\ (k(i)\neq 0\ \&\ i\notin H^X_\beta)]] \Leftrightarrow \bigvee_{m,k}[f(n,k,m)=0 \wedge \bigvee_{c\in{}^m2}\bigwedge_{i<m}$ $[(k(i)=0)^{c(i)}\ \&\ (i\in H^X_\beta)^{c(i)}]$], 但し formula A について.

$$A^i \cong \begin{cases} A & , i=0 \\ \neg A & , i=1 \end{cases}$$

$n\notin H^X_{\beta+1} \Leftrightarrow \bigwedge_{m,k}[f(n,k,m)\neq 0 \vee \bigwedge_{c\in{}^m2}\bigvee_{i<m}[(k(i)=0)^{1-c(i)} \vee$ $\vee\ (i\in H^X_\beta)^{1-c(i)}]$

$(H^X_{\beta+1})$, $(\neg H^X_{\beta+1})$ を次のようにする。

$(H^X_{\beta+1})$

$$\frac{\Gamma, f(n,k,m)=0 \qquad \cdots, \Gamma, (k(i)=0)^{c(i)} \quad \Gamma, (i \in H^X_\beta)^{c(i)} \cdots}{\Gamma, n \in H^X_{\beta+1}}$$

for some $m, k < \omega$ and $c \in {}^m 2 = \{ c \in \omega : c : m \to 2 \}$.

上式は $(1+m)$ケ。

$(\neg H^X_{\beta+1})$ $$\frac{\cdots \ \Gamma, A_{mkc} \ \cdots}{\Gamma, n \notin H^X_{\beta+1}}$$ for all $m, k < \omega$ and $c \in {}^m 2$

但し A_{mkc} は $f(n,k,m) \neq 0$, $(k(i)=0)^{1-c(i)}$, $(i \in H^X_\beta)^{1-c(i)}$ $(i<m)$

という $(1+m\cdot 2)$ケの formulae のいずれかを表わす。

Def. formula の長さ = rank.

1. $r(s=t) \triangleq r(s \neq t) = 0$

$$r(t \in H^X_n) = r(t \notin H^X_n) = \begin{cases} n, & n \leq \alpha \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

2. $r(\wedge \Phi) = r(\vee \Phi) = \sup\{ r(A)+1 : A \in \Phi \}$

Def. derivation の長さ = depth

1. $\mathcal{D}$ が axiom $(Ax), (Ax')$ だけのとき: $|\mathcal{D}| = 0$

2. $|\mathcal{D}| = \sup_{i<n}(|\mathcal{D}_i|+1)$ $\{\mathcal{D}_i\}_{i<\omega}$ は $\mathcal{D}$ の imm. subderivations.

Rem. 無限の長さの formula, derivations の長さを上のように定義しないで、例えば $|\mathcal{D}| \leq \beta$ ($|\mathcal{D}| = \beta$ でなく) を定義すれば constructive - arithmetical にできる。

Def. $\vdash \Gamma \ [\gamma, \beta] \Leftrightarrow \exists$ derivation $\mathcal{D}$ s.t. $|\mathcal{D}| \leq \beta$ and $r(A) < \gamma$ for any cut formula A in $\mathcal{D}$.

これで setting が終った。あとはふつうどうりに（cf. [9]）：

Elimination Lemma. $\vdash \Gamma, A\ [\gamma, \beta_0]$ & $\vdash \neg A, \Lambda\ [\gamma, \beta_1]$

& $r(A) \le \gamma \quad \Rightarrow \quad \vdash \Gamma, \Lambda\ [\gamma, \beta_0 \# \beta_1]$

（$\beta_0 \# \beta_1$ は natural (commutative, Hessenberg) sum）

Elimination Theorem. $\vdash \Gamma\ [\alpha+\beta, \gamma] \Rightarrow \vdash \Gamma\ [\alpha, \theta_\beta(\gamma)]$

とくに. $\vdash \Gamma\ [\alpha, \gamma] \quad \Rightarrow \quad \vdash \Gamma\ [0, \theta_\alpha(\gamma)]$

Embedding Lemma. $(H^X)_\alpha \vdash A(X) \quad \Rightarrow \vdash A^+(H^X_0)\ [<\alpha+\omega, <\omega+\omega]$

i.e. $\vdash A^+(H^X_0)\ [\alpha+l, \omega+k]$ for some $l, k<\omega$.

但し $A^+(H^X_0)$ は. $A(X)$ の X に H^X_0 を代入し. $\forall n$, $\exists n$ を. $\bigwedge_n$, $\bigvee_n$ でおきかえた formula（$A(X)$ に H^X なし）

Lemma 2 の証明。$(H^X_\alpha) \vdash A(X) \Rightarrow \vdash A^+(H^X_0)\ [0, <\theta_\alpha(\varepsilon_0)]$ となる。（$\theta_l(\omega+k) < \varepsilon_0$）これを算術化・形式化して partial truth def. を経て. $ACA_0 + I(<\theta_\alpha(\varepsilon_0)) \vdash A(X)$。 //

§7. 補遺

ここでは. M. Rathjen [8] から本稿に直接関係のある結果を拾う。

Def. 1. binary R について. R を順序のように考えるときには. $R(a,b)$ を aRb と書く。$WO(R)$ は 'R is a well ordering on ω' を Π^1_1 で書いた formula（しかし. ACA_0 を仮定するから '無限下降列がない' $WF(R)$' と書いても. $\forall X\, I(R, X)$ と書いても同じ）。

2. $Y_{Ri} \overset{\circ}{=} \{ \langle j, x \rangle : jRi \ \& \ \langle j, x \rangle \in Y \}$

3. pos. operator form $\mathfrak{A}(X^{+}, Y, i, x)$ について.

$Cl^{\mathfrak{A}}_{Y,i}(X) \overset{\circ}{\Leftrightarrow} Cl^{\mathfrak{A}}(X, Y, i) \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \forall x [\mathfrak{A}(X, Y, i, x) \to x \in X]$

$IT^{\mathfrak{A}}(R, Y) \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \forall i [Cl^{\mathfrak{A}}((Y)_i, Y_{Ri}, i) \ \& \ \forall X (Cl^{\mathfrak{A}}(X, Y_{Ri}, i) \to (Y)_i \subseteq X)]$

(cf. p. 60)

4. $AUT\text{-}ID_0 \overset{\circ}{=} ACA_0 + (IT.1)$

$(IT.1)$ $\forall R [WO(R) \to \exists Z \, IT^{\mathfrak{A}}(R, Z)]$, 各 pos. operator form $\mathfrak{A}$.

5. $AUT\text{-}ID_2 \overset{\circ}{=} ACA + (IT.1) + (IT.2)$

$(IT.2)$ $\forall R \forall Y \forall i [WO(R) \ \& \ IT^{\mathfrak{A}}(R, Y) \ \& \ Cl^{\mathfrak{A}}(A, Y_{Ri}, i) \to (Y)_i \subseteq A]$

各 $\mathfrak{A}$ と, 任意の formula A in L_2 について.

以下, $\mathcal{F}$ を L_2 での formulae の集合とする.

6. $\mathcal{F}\text{-}TR_0 \overset{\circ}{=} ACA_0 + (\mathcal{F}\text{-}TR)$

$(\mathcal{F}\text{-}TR)$ $\forall R [WO(R) \to \exists Z \forall i \forall y (y \in (Z)_i \leftrightarrow B(Z_{Ri}, i, y))]$

$B \in \mathcal{F}$.

7. $\mathcal{F}\text{-}TRDC_0 \overset{\circ}{=} ACA_0 + (\mathcal{F}\text{-}TRDC)$

$(\mathcal{F}\text{-}TRDC)$ $WO(R) \ \& \ \forall i \forall X \exists Y A(i, X, Y) \to \exists Z \forall i \, A(i, Z_{Ri}, Z_i)$

8. $\mathcal{F}\text{-}TI$: $\forall R [WO(R) \to I(R, A)]$, $A \in \mathcal{F}$

9. 但し, $\mathcal{F} = \Delta^1_n$ のときは, $\Delta^1_n\text{-}TR_0 \overset{\circ}{=} ACA_0 + (\Delta^1_n\text{-}TR)$

$(\Delta^1_n\text{-}TR)$ $WO(R) \ \& \ \forall X \forall i \forall y [B(X, i, y) \leftrightarrow A(X, i, y)] \to$

$\exists Z \forall i \forall y (y \in (Z)_i \leftrightarrow B(Z_{Ri}, i, y))$

, $B, \neg A \in \Sigma^1_n$.

Proposition. 1. $\Pi^1_1\text{-TR}_0 = \text{AUT-ID}_0$

2. $\Pi^1_1\text{-TR} + \text{BI} = \text{AUT-ID}_2 = \text{AUT-ID}_0 + \text{BI}$

3. $\Delta^1_2\text{-TR}_0 = \Sigma^1_2\text{-TRDC}_0 \subsetneq \Delta^1_2\text{-CA}_0 + \Sigma^1_2\text{-TI}$

Proof. 1. $\Pi^1_1\text{-TR}_0 \subseteq \text{AUT-ID}_0$ には Π^1_1-normal form を考える。

2 cf §5 3 $\Delta^1_2\text{-TR}_0 \vdash \Sigma^1_2\text{-TRDC}$ には Π^1_1-uniformization を使う。

Proposition 1. $\text{ATR}_0 \vdash \text{BI}(\Delta^0_1{}^-) \to \text{BI}(\Sigma^1_1{}^-)$

2. $\text{ATR}_0 \vdash \text{BI}(\Delta^0_1{}^=) \to \text{BI}(\Sigma^1_1{}^=)$

但し、$\text{ATR}_0 \overset{\circ}{=} \Pi^1_0\text{-TR}_0$, $\mathcal{F}^=$ は $A \in \mathcal{F}$ (formulae の集合) でかつ、A に一切の parameter なし, i.e., sentence.

Proof. ([ ] Satz 6.9). 2. Σ^1_1-boundedness による。つまり、$\prec \in \Sigma^1_1{}^=$, $WO(\prec)$ として、$e \in \omega$ について、$m <_e n \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \{e\}(\langle m, n\rangle) \simeq 0$,

$LO(<_e)$: $<_e$ is a linear order, $|<_e| \leq |\prec|$ を Σ^1_1 formula s.t. $\exists$ order preserving $f: <_e \to \prec$ として、

$\mathcal{B} \overset{\circ}{=} \{e \in \omega : \{e\} \text{ is total}, LO(<_e) \,\&\, |<_e| \leq |\prec|\} : \Sigma^1_1$ とすれば、

Kleene の $\mathcal{O}$ の Π^1_1-completeness より $\exists d \in \mathcal{O}\ (d \notin \mathcal{B})$. ATR_0 で CWO (Comparability of Well Orderings) を使えるから、$\exists g$ s.t. g は $\prec$ から $<_d$ への order preserving map. これより $\prec$ についての超限帰納法は、$<_d$ についてのそれに帰する。 //.

Proposition 1. $\text{ATR}_0 + \Sigma^1_1\text{-IA} \vdash \text{Con}(\text{ATR}_0)$

2. $\text{RCA}_0 + \Sigma^1_1\text{-GDC} \vdash \Sigma^1_1\text{-IA}$.

3　$ATRDC_0 \vdash Con(ATR_0)$

Proof　3. $ATRDC_0 \vdash \Sigma^1_1\text{-}GDC$ より 1, 2 から.

1.　[12] より　$ATR_0 + \Sigma^1_1\text{-}IA = ATR_0 + \Pi^1_3\text{-}RFN_{ATR_0}$.

$\Pi^1_3\text{-}RFN_{ATR_0}$: $Pr_{ATR_0}(\ulcorner A(\dot{n}) \urcorner) \to A(n)$, $A \in \Pi^1_3$　　　%

Rem. [12] より, より強く,　$ATR_0 \vdash \Sigma^1_1\text{-}GDC \leftrightarrow \Pi^1_3\text{-}\omega\text{-}RFN_{ATR_0}$

$\Pi^1_3\text{-}\omega\text{-}RFN_{ATR_0}$ は, $ATR_0 + \omega$-rule で証明できる Π^1_3 は true という公理。

謝辞. 本稿の主な部分, すなわち §§1, 2, 6 は, 1986年の暮れに, 河合文教研において行なわれた研究集会の際に筆者が用意したノートに基づいている。そこでの講演の機会をお与え下さり, また, 今回 §4 を書くための資料(筆者の手紙)を快くお貸し下さった倉田令二郎先生に感謝致します。

参考文献

[1] W. Buchholz, S. Feferman, W. Pohlers, W. Sieg, Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis : Recent Proof-theoretical Studies, LNM 897, Springer (1981).

[2] S. Buss, Bounded Arithmetic, Bibliopolis (1986).

[3] A. Cantini, On the relation between choice and comprehension principles in second order arithmetic, JSL 51 (1986), 360-373.

[4] S. Feferman, Formal theories for transfinite iterations of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis, in 'Intuitionism and Proof Theory' (1970), 303-325.

[5] S. Feferman, Iterated inductive fixed-point theories: Applications to Hancock's conjecture, Patras Logic Symposion, 171-196 (1982).

[6] J.-Y. Girard, Proof Theory and Logical Complexity, vol. I. Bibliopolis (1987)

[7] W. A. Howard & G. Kreisel, Transfinite induction and bar induction of type zero and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis. JSL 31 (1966), 325-358.

[8] M. Rathjen, Untersuchungen zu Teilsystemen der Zahlentheorie zweiter Stufe und der Mengenlehre mit einer zwischen Δ^1_2-CA und Δ^1_2-CA+BI liegenden Beweisstärke, dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1989

[9] K. Schütte, Proof Theory, Springer (1977).

[10] H. Schwichtenberg, Proof theory: some applications of cut-elimination, Handbook of Mathematical Logic, 867-895 (1977).

[11] W. Sieg, Fragments of arithmetic, Ann. Pure & Appl. Logic 28 (1985), 33-72.

[12] S. Simpson, Σ_1^1 and Π_1^1 transfinite induction, Logic Colloquium 80 (1982), 239-253.

[13] S. Simpson, Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations? JSL 49 (1984), 783-802.

[14] W. W. Tait, Functionals defined by transfinite recursion. JSL 30 (1965), 155-174.

[15] A. Wilkie & J. Paris, On the scheme of induction for bounded arithmetic formulas, Ann. of Pure & Appl. Logic 35 (1987), 261-302